Cours de Première année
Étudiants et Apprentis

Mathématiques I
Fondamentaux en mathématiques

Enseignant : Jean-Claude Roux
Auteur du présent document : Hélène Ricard

Introduction

Ce cours de mathématiques aborde un certain nombre de notions considérées comme indispensables à votre culture scientifique. Il s'agit en théorie d'un module de révisions mais l'expérience prouve que ces notions sont souvent mal acquises et nécessitent d'être approfondies. Les thèmes abordés sont les suivants :

1. **Nombres complexes** **p. 3**
   Les objectifs principaux sont de savoir manipuler les différentes écritures d'un complexe, de pouvoir les utiliser lors de calculs trigonométriques et de savoir calculer *et* reconnaître les racines n-ièmes d'un nombre complexe donné.

2. **Polynômes** **p. 7**
   On s'attachera en particulier à savoir décomposer un polynôme en produit de polynômes irréductibles et à connaître les différentes divisions de polynômes (division euclidienne, division par les puissances croissantes).

3. **Fractions rationnelles** **p. 10**
   Étude des techniques de calcul pour la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples. Ceci utilise en particulier les notions des deux chapitres précédents. Ces techniques seront très fortement employées lors de l'étude de la transformée de Laplace abordée prochainement en cours de Mathématiques II – Outils mathématiques pour l'ingénieur .

4. **Calcul intégral** **p. 16**
   Calcul de primitives usuelles (principalement celles des fractions rationnelles) et utilisation de techniques classiques telles que le changement de variable et l'intégration par parties.

5. **Algèbre Linéaire** **p. 22**
   Ce chapitre contient des résultats essentiels d'algèbre linéaire. On étudie rapidement les propriétés des espaces vectoriels, des applications linéaires et des matrices. Ensuite, on rappelle les propriétés et usages du déterminant ainsi que les principaux théorèmes de diagonalisation.

6. **Équations différentielles** **p. 31**
   On se limite principalement à l'étude des équations linéaires d'ordre 1 et des équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants dont le second membre est d'une forme particulière.

Vous trouverez à la fin de ce poly, quelques sujets de devoirs des années précédentes (p. 39) et quelques corrigés.

À noter : ***Lors des examens y compris pour l'examen de rentrée,*** *les calculatrices ainsi que tous les documents sont autorisés.*

Pour toute question, vous pouvez contacter : **jean-claude.roux@pagora.grenoble-inp.fr**

Chapitre 1 :

Nombres complexes

1.1 Définitions

Définition 1.1.1

L'ensemble des **nombres complexes**, *noté* $\mathbb{C}$, *est l'ensemble des nombres qui s'écrivent de manière unique* $z = a + ib$, *où* a *et* b *sont des réels et* i *est le* **nombre imaginaire** *qui vérifie* $i^2 = -1$.

- ✓ $a + ib$ *est appelé l'***écriture cartésienne** *de* z,
- ✓ a *est appelé la* **partie réelle** *de* z, *notée* $\mathrm{Ré}\,(z)$,
- ✓ b *est appelé la* **partie imaginaire** *de* z, *notée* $\mathrm{Im}\,(z)$,
- ✓ $\sqrt{a^2 + b^2}$ *est appelé le* **module** *de* z, *noté* $|z|$,
- ✓ $a - ib$ *est appelé le* **conjugué** *de* z, *noté* $\overline{z}$.

Définition 1.1.2 (*Opérations sur les complexes*)

Soient $z = a + ib$ *et* $z' = a' + ib'$ *deux complexes* (a, b, a' *et* b' *étant réels*),

- ✓ *on définit l'addition de* z *et* z', $z + z' = (a + a') + i(b + b')$,
- ✓ *on définit la multiplication de* z *par* z', $zz' = (aa' - bb') + i(a'b + ab')$,
- ✓ *si* $z \neq 0$, *on définit l'inverse de* z, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a + ib} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Remarques.

1. L'addition et la multiplication ainsi définies suivent les mêmes règles que la somme et le produit usuels des réels qu'elles prolongent.
2. En particulier elles sont commutatives ainsi, pour $a \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{i}a = a\mathrm{i}$. Il est d'usage d'écrire 3i plutôt que i3...

Exemple : Si $z = 1 + 2\mathrm{i}$, $z' = -1 - \mathrm{i}$, $z'' = 3 + 2\mathrm{i}$, on peut calculer $zz' + zz'' = z(z' + z'') = (1 + 2\mathrm{i})(2 + \mathrm{i}) = 5\mathrm{i}$.

Proposition 1.1.3

Soient z *et* z' *des complexes*

1. $z = z' \iff \Big(\mathrm{Ré}(z) = \mathrm{Ré}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')\Big)$,
2. $\mathrm{Ré}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$,
3. $z = \overline{z} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$,
4. $z = -\overline{z} \iff \mathrm{Ré}\,(z) = 0 \iff z$ *est un nombre imaginaire pur*,
5. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$,
6. $|z| = 0 \iff z = 0$,
7. $|z| = |\overline{z}|$,
8. $z\overline{z} = |z|^2$,
9. $|zz'| = |z||z'|$,
10. *si* $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$,
11. *si* $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$,

12. *si* $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

Proposition 1.1.4 (*Inégalités*)

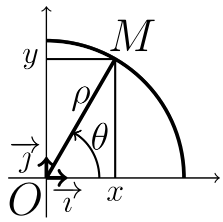
Soient z et z' des complexes

1. $|\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$,
2. $|\mathrm{Ré}\,(z)| \leqslant |z|$,
3. $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$, *(**inégalité triangulaire**)*
4. $||z| - |z'|| \leqslant |z+z'|$.

1.2 Interprétation géométrique et écriture trigonométrique

Supposons que le plan affine à deux dimensions est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'application qui à $z = x + \mathrm{i}y$ fait correspondre M le point de coordonnées (x, y) est bijective.
On dit alors que z est ***affixe*** de M.

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\boxed{z = x + \mathrm{i}y}$ (***écriture cartésienne de*** z).



Si on note θ l'angle formé entre $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OM}$ et $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$, alors

1. $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$,
2. $\boxed{z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}$ (***écriture trigonométrique de*** z)
   si on note
   $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$
   alors $\boxed{z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ (***écriture exponentielle de*** z).
3. $\overline{z}$ est l'affixe du symétrique orthogonal de M par rapport à $O\vec{\imath}$.

Proposition et définition 1.2.1

Soit z un nombre complexe,

✓ *il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$.*
Un tel réel θ est appelé un **argument de** z*, noté* $\arg(z)$.

✓ *si $z \neq 0$, il existe un **unique** $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$ vérifiant $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta_0}$. θ_0 est appelé* **argument principal de** z.
L'ensemble des arguments de z est alors $\{\theta_0 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 1.2.2

Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$

1. $\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\theta'}$
2. $\mathrm{e}^{-i\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$
3. $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$, *pour* $n \in \mathbb{Z}$

Proposition 1.2.3

Soient $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = |z'|\mathrm{e}^{i\theta'}$

1. $zz' = |z||z'|\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$
2. *si* $z' \neq 0$, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{|z|}{|z'|}\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$

Théorème 1.2.4

Soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}$

1. ***Formules d'Euler***
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$
2. ***Formule de Moivre***
$$\left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta}$$
3. ***Formule du binôme de Newton***
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Applications des formules d'Euler et de Moivre.

1. ***Linéarisation de*** $(\cos\theta)^n$ ***ou de*** $(\sin\theta)^n$ ***ou de*** $(\cos\theta)^n(\sin\theta)^p$ ***:***
il s'agit d'exprimer ces expressions à l'aide de sommes de sinus et de cosinus d'angle $k\theta$ en utilisant les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton.

   Exemple : $(\cos\theta)^3 = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta$
2. ***Expression de*** $\cos(n\theta)$ ***et de*** $\sin(n\theta)$ ***en fonction de puissances de*** $\cos\theta$ ***et de*** $\sin\theta$ ***:***
On utilise en général les formules de Moivre et la formule du binôme du Newton, puis on prend la partie réelle s'il s'agit d'un cosinus ou la partie imaginaire lorsqu'il s'agit d'un sinus.

   Exemple : $\cos(5\theta) = 16(\cos\theta)^5 - 20(\cos\theta)^3 + 5\cos\theta$

1.3 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

1.3.1 Définition et détermination des racines n-ièmes

Définition 1.3.1

Soient $z \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on appelle* **racine** n**-ième** *de* z, *tout nombre complexe* ζ *tel que* $\zeta^n = z$.

Exemple : Les racines troisièmes de 1 sont tous les complexes z vérifiant $z^3 = 1$.

Théorème 1.3.2

Soient $z \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on suppose que* $z = \rho e^{i\theta}$ *où* ρ *est le module et* θ *l'argument de* z, *alors* z *possède exactement* n *racines* n*-ièmes distinctes,* $z_0, \ldots, z_{n-1}$, *données par :*

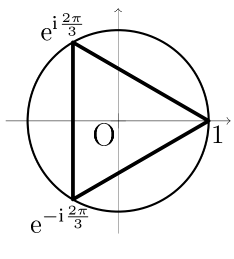
$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \; z_k = \sqrt[n]{\rho}.e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

On note M_k *le point d'affixe* z_k *avec* $k \in \{0, 1, \ldots, \; n-1\}$.
Les n *points* M_k *sont les sommets d'un polygone régulier centré à l'origine et de rayon* $\sqrt[n]{\rho}$.

Remarque. Si $z = 1$, on parle des racines n-ième de l'unité.

Exemple :

Il y a exactement trois racines troisièmes de 1 distinctes. Ce sont 1, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Elles se situent aux sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique dont 1 et l'un des sommets.



Proposition 1.3.3 (*Racines n-ièmes de l'unité*)

Soit n *un entier naturel non nul.* 1 *admet* n *racines* n*-ièmes distinctes.*
Leur forme générale est $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = z_1^k$ *avec* $k \in \{0, \; 1, \ldots, \; n-1\}$.

1.3.2 Le cas des racines carrées

*La notation $\sqrt{z}$ est à **proscrire absolument** pour les complexes, on écrit « δ tel que $\delta^2 = z$ ».*

Proposition 1.3.4

Tout nombre complexe z non nul admet deux racines carrées distinctes et opposées. Soient $z = a + ib$ et $\zeta = x + iy$ alors

$$\zeta^2 = z \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (E1) \\ 2xy = b & (E2) \end{cases} \quad \text{de plus} \quad |\zeta|^2 = |z| \Rightarrow x^2 + y^2 = |z| \ (E3)$$

On trouve les valeurs absolues de x et y grâce à $(E1)$ et $(E3)$ puis leurs signes avec $(E2)$.

1.3.3 Résolution d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Théorème 1.3.5

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, avec $a \neq 0$, on considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

Les solutions de cette équation sont : $\boxed{z_1 = \dfrac{-b + rc_1}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \dfrac{-b + rc_2}{2a} = \dfrac{-b - rc_1}{2a}}$

où rc_1 et rc_2 sont les deux racines carrées complexes de $\Delta = b^2 - 4ac$, c'est-à-dire les deux solutions de l'équation : $x^2 = \Delta$ (on rappelle que $rc_2 = -rc_1$).

Chapitre 2 :

Polynômes

Dans tout ce cours $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Définition

Définition 2.1.1

On appelle ***polynôme à coefficients dans*** $\mathbb{K}$ *un objet mathématique* P *s'écrivant :*

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$

où $n \in \mathbb{N}$ *et* $a_0, \ldots a_n$ *sont des éléments de* $\mathbb{K}$ *appelés les* **coefficients de** P.

- ✓ *L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est noté* $\mathbb{K}[X]$.
- ✓ X *est appelé l'***indéterminée**.
- ✓ *La fonction d'une variable réelle ou complexe* $f : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *est appelée* ***fonction polynomiale associée à*** P.
- ✓ *Si tous les coefficients de* P *sont nuls, on dit que* P *est le* **polynôme nul**.
- ✓ *Pour* $P \in \mathbb{K}[X]$, *on définit le* ***degré de*** P, *noté* $\deg(P)$ *:*
  1. *Si* P *est le polynôme nul alors* $\deg(P) = -\infty$.
  2. *Si* P *n'est pas le polynôme nul,* $\deg(P) = n$ *où* n *est le plus grand indice tel que* $a_n \neq 0$. a_n *est alors appelé* ***coefficient dominant de*** P.
- ✓ *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on note* $\mathbb{K}_n[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ **dont le degré est inférieur ou égal à** n.
- ✓ *Pour* $P \in \mathbb{K}[X]$, *on définit la* ***valuation de*** P, *notée* $\mathrm{val}(P)$ *:*
  1. *Si* P *est le polynôme nul alors* $\mathrm{val}(P) = +\infty$.
  2. *Si* P *n'est pas le polynôme nul,* $\mathrm{val}(P) = k$ *où* k *est le plus petit indice tel que* $a_k \neq 0$.

2.1.1 Opérations sur les polynômes

Soient $P = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{m} b_iX^i$ deux polynômes de degrés respectifs n et $m \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $i > \deg(P)$, $a_i = 0$ et pour tout $i > \deg(Q)$, $b_i = 0$.

✓ Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, le polynôme λP s'écrit : $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k)X^k$.

✓ La somme des deux polynômes s'écrit : $P + Q = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i)X^i$.

✓ Le produit des deux polynômes s'écrit : $PQ = \sum_{i=0}^{m+n} c_iX^i$ avec $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_kb_{i-k}$.

Proposition 2.1.2

On a $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ *et* $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Proposition 2.1.3

Dans $\mathbb{K}[X]$, *on a la propriété :* $(PQ = \mathbf{0}) \iff (P = \mathbf{0}$ *ou* $Q = \mathbf{0})$.

Définition 2.1.4 (*Polynôme dérivé*)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *un élément de* $\mathbb{K}[X]$. *On définit le* **polynôme dérivé** *de* P, *noté* P' *en posant*

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

Si P *est de degré* n, *alors* P' *est de degré* $n-1$.
En réitérant le procédé, on peut définir pour tout $k \geqslant 2$, *le* k**-ième polynôme dérivé** *de* P *qui est le polynôme dérivé du* $(k-1)$*-ième polynôme dérivé de* P *; on le note* $P^{(k)}$.

Proposition 2.1.5 (*Formule de Taylor*)

Soit P *un polynôme de degré* n *et* $a \in \mathbb{K}$. *On note* $\widetilde{P}$ *la fonction polynomiale associée à* P, *alors*

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

2.2 Divisions de polynômes

2.2.1 Division euclidienne (puissances décroissantes)

Théorème 2.2.1

Soient A *et* B *deux éléments de* $\mathbb{K}[X]$ *tels que* $B \neq 0$ *alors*

$$\exists\,!\ (Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ \big(\ A = Q.B + R\ \big) \text{ et } \big(\ \deg\,(R) < \deg\,(B)\ \big)$$

Alors Q *est appelé* **quotient** *et* R *est appelé* **reste** *de la division euclidienne de* A *par* B.

Définition 2.2.2

Soient A *et* B *deux polynômes avec* $B \neq 0$. *On dit que* B **divise** A, *noté* $B \mid A$ *si le reste de la division euclidienne de* A *par* B *est nul.*

Définition 2.2.3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, *on dit que* P *est* **irréductible** *si :*
- ✓ $\deg\,(P) \geqslant 1$
- ✓ *les seuls polynômes qui divisent* P *sont les polynômes constants et les polynômes* λP *avec* $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

2.2.2 Division par les puissances croissantes

Théorème 2.2.4

Soient A *et* B *deux éléments de* $\mathbb{K}[X]$, *on suppose que le terme constant de* B *est non nul, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\,!\ (Q_n,R_n) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ \big(\ A = Q_n.B + X^{n+1}R_n\ \big) \text{ et } \big(\deg(Q_n) \leqslant n\big)$$

2.3 Racines d'un polynôme

Définition 2.3.1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on note f la fonction polynomiale associée à P. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, on dit que α **est une racine de** *P si $f(\alpha) = 0$.*

Proposition 2.3.2

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors α est une racine de P si et seulement si $(X - \alpha) \mid P$.

Définition 2.3.3

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P. On appelle **multiplicité de** *α l'entier n tel que*

$$(X - \alpha)^n \mid P \text{ et } (X - \alpha)^{n+1} \nmid P$$

Proposition 2.3.4

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si α est une racine de P, P', ... , $P^{(m-1)}$ mais pas de $P^{(m)}$.

Proposition 2.3.5

Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n alors

1. *si $P \neq 0$, P possède au maximum $m = \deg(P)$ racines comptées avec leur multiplicité.*
2. *si P possède $n+1$ racines comptées avec leur multiplicité, alors P est le polynôme nul.*

2.4 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

2.4.1 Dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 2.4.1 (*Théorème de D'Alembert*)

Tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Énoncés équivalents :

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
2. Tout polynôme de degré n possède exactement n racines comptées avec leur multiplicité
3. $\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \exists\, !\ (a, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1},\ P = a \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$

2.4.2 Dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 2.4.2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ alors α est racine de P si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine de P.

Proposition 2.4.3

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont

(a) les polynômes de degré 1 ;

(b) les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Théorème 2.4.4

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près et à multiplication par des scalaires près) sous forme de produit de polynômes irréductibles.

Corollaire 2.4.5

Tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

Chapitre 3 :

Fractions rationnelles

Dans tout ce cours $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Définition

Définition 3.1.1

Une **fraction rationnelle à coefficients dans** $\mathbb{K}$ *est un quotient de deux polynômes* P *et* Q *avec* $Q \neq 0$: $F = \dfrac{P}{Q}$.
On supposera que P *et* Q *n'ont pas de racines communes (ni réelles, ni complexes) et que le coefficient dominant de* Q *est* 1.
On dit alors que F *est mise sous* **forme irréductible**.
P *s'appelle le* **numérateur** *de* F *et* Q *s'appelle le* **dénominateur** *de* F.
L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ *est noté* $\mathbb{K}(X)$.

Remarque. Cette définition donne une vision simplifiée des fractions rationnelles (qui sont en fait des classes d'équivalences d'une certaine relation d'équivalence...), mais elle est suffisante pour l'usage que nous en ferons.

Remarque. Tout quotient de deux polynômes peut s'écrire de manière unique sous forme d'une fraction rationnelle irréductible :

- ✓ si α est une racine commune de P et Q, on simplifie en haut et en bas par $(X-\alpha)$ autant de fois que nécessaire,
- ✓ si le coefficient dominant de Q est a différent de 1, on factorise Q par a, en posant $Q = a\widetilde{Q}$, on a alors :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{a\widetilde{Q}} = \frac{\frac{1}{a}P}{\widetilde{Q}}$$

Définition 3.1.2 (*Racines et pôles*)

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ *une fraction rationnelle irréductible.*
On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *les racines de* A *et* $m_1, \dots, m_n$ *leur multiplicité.*
On note $\beta_1, \dots, \beta_l$ *les racines de* B *et* $p_1, \dots, p_l$ *leur multiplicité.*

1. *Pour* $i \in \{1, \dots, n\}$, *on dit que* α_i *est une* **racine de** F **de multiplicité** m_i.
2. *Pour* $j \in \{1, \dots, l\}$, *on dit que* β_j *est un* **pôle de** F **de multiplicité** p_j.
3. *Si* β *est une racine simple de* B, *on dit que* β *est un* **pôle simple** *de* F. *Si* β *est une racine multiple de* B, *on dit que* β *est un* **pôle multiple** *de* F.

Définition 3.1.3 (*Partie entière*)

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ *une fraction rationnelle irréductible.*
On appelle **partie entière de** F *le polynôme* Q *égal au quotient de la division euclidienne de* A *par* B.

Remarque. Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle irréductible.

- ✓ Si $\deg(A) < \deg(B)$ alors la partie entière est nulle.

✓ Si $\deg(A) \geqslant \deg(B)$ alors il existe un unique polynôme R tel que $\deg(R) < \deg(B)$ et

$$F = Q + \frac{R}{B}$$

il suffit d'écrire $A = QB + R$ où Q et R sont le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B (on rappelle qu'ils sont uniques).

Définition 3.1.4 (*Éléments simples*)

On appelle **élément simple** *toute fraction rationnelle irréductible s'écrivant* $\dfrac{R}{P^\alpha}$ *où* P *est un polynôme irréductible (dont le coefficient dominant est 1),* $\alpha \in \mathbb{N}^*$ *et* $\deg(R) < \deg(P)$.

Proposition 3.1.5

Dans $\mathbb{C}(X)$, *les éléments simples s'écrivent* $\dfrac{b}{(X-a)^\alpha}$, *avec* $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 3.1.6

Dans $\mathbb{R}(X)$, *les éléments simples s'écrivent :*

1. $\dfrac{b}{(X-a)^\alpha}$, *avec* $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^*,\ \alpha \in \mathbb{N}^*$.
   Ce sont les éléments simples de **première espèce**.
2. $\dfrac{aX+b}{(X^2+cX+d)^\alpha}$, *avec* $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, *tel que* $(a,b) \neq (0,0)$, $c^2-4d<0$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
   Ce sont les éléments simples de **deuxième espèce**.

3.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Théorème 3.2.1

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ *une fraction rationnelle à coefficients dans* $\mathbb{C}$ *écrite sous forme irréductible avec* $B = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{m_i}$.
On a la décomposition

$$F = Q + \sum_{i=1}^{p}\left[\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{ij}}{(X-\alpha_i)^j}\right]$$

où Q *est la partie entière de* F *et les* a_{ij} *sont des complexes. Une telle décomposition est unique.*

Exemple : Si on pose $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$, alors la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ de $F = \dfrac{X^8}{(X-2)^3(X^2+X+1)^2}$ à la forme suivante :

$$F = Q + \frac{a_1}{X-2} + \frac{a_2}{(X-2)^2} + \frac{a_3}{(X-2)^3} + \frac{b_1}{X-j} + \frac{b_2}{(X-j)^2} + \frac{c_1}{X-j^2} + \frac{c_2}{(X-j^2)^2}$$

où Q est un polynôme de degré 1, $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ sont des complexes (en fait a_1, a_2 et a_3 sont réels).

3.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Théorème 3.3.1

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ *une fraction rationnelle à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *écrite sous forme irréductible avec*
$B = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{q}(X^2+b_jX+c_j)^{n_i}$ *avec* $b_j^2 - 4c_j < 0$ *pour tout* $j \in \{1, \ldots, q\}$.

On a la décomposition

$$F = Q + \sum_{i=1}^{p}\left[\sum_{k=1}^{m_i}\frac{a_{ik}}{(X-\alpha_i)^k}\right] + \sum_{j=1}^{q}\left[\sum_{l=1}^{n_j}\frac{b_{jl}X+c_{jl}}{(X^2+b_jX+c_j)^l}\right]$$

où Q *est la partie entière de* F *et les* a_{ik}, b_{jl}, c_{jl} *sont des réels. Une telle décomposition est unique.*

La dernière partie de cette décomposition peut-être obtenue en regroupant deux à deux les parties associées aux pôles conjugués de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$.

Exemple : Avec la même fraction F que dans l'exemple précédent, la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ sera :

$$F = Q + \frac{a_1}{X-2} + \frac{a_2}{(X-2)^2} + \frac{a_3}{(X-2)^3} + \frac{d_1X+e_1}{X^2+X+1} + \frac{d_2X+e_2}{(X^2+X+1)^2}$$

où Q, a_1, a_2 et a_3 sont les mêmes que dans la décomposition dans $\mathbb{C}$ et d_1, d_2, e_1, e_2 sont des réels.

3.4 Calcul de la décomposition

Plan du travail : Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle irréductible.
Pour décomposer F en éléments simples.

1. Faire la division euclidienne de A par B, alors $A = BQ + R$, avec $\deg(R) < \deg(B)$ donc
$$\frac{A}{B} = \underbrace{Q}_{\text{partie entière}} + \frac{R}{B}$$
2. On décompose alors $\dfrac{R}{B}$.
3. Écrire B comme produit de facteurs irréductible.
4. Écrire la forme de la décomposition cherchée.
5. Utiliser diverses techniques pour trouver les coefficients les uns après les autres.

Il est vivement déconseillé de tout réduire au même dénominateur, tout développer puis d'identifier... si on fait une seule erreur, tous les coefficients seront faux !

3.4.1 Techniques valables dans $\mathbb{C}(X)$ ou $\mathbb{R}(X)$

Supposons que $F = \dfrac{R}{B}$ est une fraction rationnelle irréductible avec $\deg(R) < \deg(B)$.

1. **Cas d'un pôle simple :** $B = (X-\alpha)B_1$ où $\widetilde{B}_1(\alpha) \neq 0$.

   L'élément simple correspondant dans la décomposition de F est : $\dfrac{a}{X-\alpha}$ avec $a \in \mathbb{K}$.

   Alors $\boxed{a = \dfrac{R(\alpha)}{B_1(\alpha)} = \dfrac{R(\alpha)}{B'(\alpha)}}$

   Autrement dit, **on multiplie la fraction par** $(X-\alpha)$ **et on prend sa valeur en** α**.**

   exemple A. Pour $F = \dfrac{1}{X^3-1}$ la décomposition dans $\mathbb{C}$ sera :
   $$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2} \quad \text{avec } j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$
   • $(X-1)\times F = \dfrac{1}{X^2+X+1}$ d'où $a = \dfrac{1}{1^2+1+1} = \dfrac{1}{3}$.

   • $(X-j)\times F = \dfrac{1}{(X-1)(X-j^2)}$ d'où $b = \dfrac{1}{(j-1)(j-j^2)} = \dfrac{j}{3}$

   On peut aussi obtenir b en dérivant le dénominateur : $(X^3-1)' = 3X^2$ d'où $b = \dfrac{1}{3j^2} = \dfrac{j}{3}$.

   • De manière analoque (par l'une ou l'autre des méthodes), on obtient $c = \dfrac{j^2}{3}$.

2. **Cas d'un pôle multiple :** $B = (X-\alpha)^m B_1$ où $\widetilde{B}_1(\alpha) \neq 0$ et $m > 1$.

   La partie de la décomposition correspondant au pôle α est :

$$\frac{a_1}{X-\alpha}+\frac{a_2}{(X-\alpha)^2}+\cdots+\frac{a_m}{(X-\alpha)^m}$$

Pour trouver a_m, on peut utiliser la même technique que ci-dessus : **on multiplie la fraction par** $(X-\alpha)^m$ **et on prend sa valeur en α.** *Mais* cela ne permet pas de trouver les autres !

Méthode générale :

(a) Effectuer un changement d'indéterminée, en posant $Y = X-\alpha$. On a alors

$$\frac{R(X)}{(X-\alpha)^m\times B_1(X)}=\frac{S(Y)}{Y^m\times C_1(Y)}$$

(b) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de S par C_1 : $S = TC_1+Y^mS_2$ avec deg $(T)\leqslant m-1$.

(c) La fraction s'écrit alors $\dfrac{S}{Y^mC_1}=\dfrac{TC_1+Y^mS_2}{Y^mC_1}=\dfrac{T}{Y^m}+\dfrac{S_2}{C_1}$

(d) Les coefficients de $T=a_m+a_{m-1}Y+a_{m-2}Y^2+\cdots+a_1Y^{m-1}$ donnent la partie de la décomposition relative au pôle 0 dans la fraction $\dfrac{S}{Y^\alpha C_1}=\dfrac{a_1}{Y}+\dfrac{a_2}{Y^2}+\cdots+\dfrac{a_m}{Y^m}+\dfrac{S_2}{C_1}$

(e) On revient à l'indéterminée X en utilisant $Y = X-\alpha$, et on a bien les coefficients cherchés.

exemple B. $F=\dfrac{X+2}{(X-1)^3(X^2+X+1)}$.

La décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ de F a la forme suivante :

$$F=\frac{a_1}{X-1}+\frac{a_2}{(X-1)^2}+\frac{a_3}{(X-1)^3}+\frac{bX+c}{X^2+X+1}$$

On trouve a_1, a_2 et a_3 grâce à la méthode exposée ci-dessus.

✓ Posons $Y=X-1$, $\dfrac{X+2}{(X-1)^2(X^2+X+1)}=\dfrac{Y+3}{Y^3(Y^2+3Y+3)}$.

✓ On effectue la division suivant les puissances croissantes : $3+Y=(3+3Y+Y^2)(1-\dfrac{2}{3}Y+\dfrac{1}{3}Y^2)-\dfrac{1}{3}Y^3-\dfrac{1}{3}Y^4$

✓ On divise :

$$\frac{Y+3}{Y^3(Y^2+3Y+3)}=\frac{1-\frac{2}{3}Y+\frac{1}{3}Y^2}{Y^3}+\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}Y}{3+3Y+Y^2}=\frac{1}{Y^3}-\frac{\frac{2}{3}}{Y^2}+\frac{\frac{1}{3}}{Y}+\frac{-\frac{1}{3}(Y+1)}{3+3Y+Y^2}$$

✓ On revient en X...

$$\frac{X+2}{(X-1)^2(X^2+X+1)}=\frac{1}{(X-1)^3}+\frac{-\frac{2}{3}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{3}}{(X-1)}+\frac{-\frac{1}{3}X}{X^2+X+1}$$

et c'est fini... (on a aussi obtenu l'autre partie directement ici).

3. **Utilisation d'une éventuelle parité :**

Remplacer X par $-X$ dans la décomposition et égaler avec la décomposition de F ou de $-F$ (suivant si F est paire ou impaire).

Ceci est très pratique et doit être fait systématiquement pour réduire le nombre de coefficients à calculer.

exemple C.

$$F=\frac{X^3}{(X^2-4)^2}=\frac{a}{X-2}+\frac{b}{(X-2)^2}+\frac{c}{X+2}+\frac{d}{(X+2)^2}$$

• F est impaire (en effet, $F(-X)=-F(X)$) :

$$\begin{aligned}F(-X)&=\frac{a}{-X-2}+\frac{b}{(-X-2)^2}+\frac{c}{-X+2}+\frac{d}{(-X+2)^2}\\&=\frac{-c}{X-2}+\frac{d}{(X-2)^2}+\frac{-a}{X+2}+\frac{b}{(X+2)^2}\\-F&=\frac{-a}{X-2}+\frac{-b}{(X-2)^2}+\frac{-c}{X+2}+\frac{-d}{(X+2)^2}\end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples, on identifie : $a=c$ et $b=-d$.

• Pour calculer b :

$F_1=(X-2)^2F=\dfrac{X^3}{(X+2)^2}$ puis $F_1(2)=b=\dfrac{2^3}{(4^2)}=\dfrac{1}{2}$

3.4.2 Techniques valables uniquement pour des fractions à coefficients réels

4. **Utilisation de la conjugaison :**
Si G est une fraction rationnelle à coefficients réels alors $G = \overline{G}$.
On écrit cette égalité pour la décomposition de $\frac{R}{B}$ dans $\mathbb{C}$ et on obtient des liens entre les différents coefficients.

> **exemple D.**
> $$F = \frac{X^3}{(X+2)(X^2+1)} = Q + \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i} + \frac{c}{X+2}$$
> • La **partie entière** : on effectue la division euclidienne de X^3 par $(X+2)(X^2+1) = X^3 + 2X^2 + X + 2$,
> on obtient $X^3 = 1 \times X^3 + (2X^2 + X + 2)$. Donc $Q = 1$.
>
> • On décompose $G = \frac{2X^2+X+2}{(X+2)(X^2+1)} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i} + \frac{c}{X+2}$.
> alors $\overline{G} = \frac{\overline{a}}{X+i} + \frac{\overline{b}}{X-i} + \frac{\overline{c}}{X+2}$ en identifiant, on obtient : $\overline{a} = b$ et $c \in \mathbb{R}$.
>
> • Pour calculer a :
> $F_1 = (X-i)F = \frac{X^3}{(X+2)(X+i)} = (X-i) \times 1 + a + \frac{b(X-i)}{X+i} + \frac{c(X-i)}{X+2}$
> et $F_1(i) = a = \frac{i^3}{(i+2)(2i)} = \frac{-2+i}{10}$
>
> • $b = \overline{a} = \frac{-2-i}{10}$
>
> • Pour calculer c :
> $F_2 = (X+2)F = \frac{X^3}{(X^2+1)} = (X+2) + \frac{a(X+2)}{X-i} + \frac{b(X+2)}{X+i} + c$
> $F_2(-2) = c = \frac{(-2)^3}{((-2)^2+1)} = -\frac{8}{5}$
> On obtient :
> $$F = 1 + \frac{\frac{-2+i}{10}}{X-i} + \frac{\frac{-2-i}{10}}{X+i} + \frac{-\frac{8}{5}}{X+2}$$

5. **Utilisation de la décomposition dans $\mathbb{C}$:**
On effectue la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ et on regroupe les racines complexes conjuguées.
Ceci fonctionne bien si la multiplicité des racines complexes non réelles n'est pas trop élevée.

> **exemple D (suite).**
> $$F = \frac{X^3}{(X+2)(X^2+1)} = Q + \frac{dX+e}{X^2+1} + \frac{f}{X+2}$$
> Le calcul dans $\mathbb{C}(X)$ a donné : $F = 1 + \frac{\frac{-2+i}{10}}{X-i} + \frac{\frac{-2-i}{10}}{X+i} + \frac{\frac{-8}{5}}{X+2}$
> Par unicité de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$, on a $Q = 1$, $f = \frac{-8}{5}$ et en mettant les deux premières fractions au même dénominateur, on trouve d et e.
> $\frac{\frac{-2+i}{10}}{X-i} + \frac{\frac{-2-i}{10}}{X+i} = \frac{(-2+i)(X+i) + (-2-i)(X-i)}{10(X^2+1)} = \frac{\frac{-4X-2}{10}}{X^2+1}$
> d'où $d = -\frac{2}{5}$ et $e = -\frac{1}{5}$.
> On obtient donc
> $$F = 1 + \frac{-\frac{2}{5}X - \frac{1}{5}}{X^2+1} + \frac{-\frac{8}{5}}{X+2}$$

3.4.3 Lorsqu'il reste peu de coefficients à déterminer

6. **Utilisation des limites :**
On multiplie la fraction rationnelle par X^n et en effectuant la même opération dans la décomposition, on peut déterminer des relations entre les coefficients en calculant la limite en $+\infty$ ou $-\infty$.

exemple C (suite).

$$F = \frac{X^3}{(X^2-4)^2} = \frac{a}{X-2} + \frac{1/2}{(X-2)^2} + \frac{a}{X+2} + \frac{-1/2}{(X+2)^2}$$

alors $\lim_{x\to+\infty} x\widetilde{F}(x) = 1$

et $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{a}{x-2} + \frac{1/2}{(x-2)^2} + \frac{a}{x+2} + \frac{-1/2}{(x+2)^2}\right) = 2a$

d'où $a = \frac{1}{2}$

7. **Utilisation de valeurs particulières :**
Si x n'est pas une racine de B, on peut prendre la valeur en x dans la fraction rationnelle et la décomposition.

3.4.4 Un cas particulier

8. **Cas où $B = P^m$, avec P irréductible :** (div. euclidiennes successives)

On effectue des divisions euclidiennes successives, les restes de ces divisions donnant les coefficients cherchés.

exemple E. Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F = \frac{X^5+2X+3}{(X^2+X+1)^3} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{(X^2+X+1)^2} + \frac{eX+f}{(X^2+X+1)^3}$$

• la division euclidienne de $A = X^5+2X+3$ par $B = X^2+X+1$ donne : $A = (X^3-X^2+1)B + (2+X)$, on a donc

$$F = \frac{X+2}{(X^2+X+1)^3} + \frac{X^3-X^2+1}{(X^2+X+1)^2}$$

d'où $e = 1$, $f = 2$.
• la division euclidienne de X^3-X^2+1 par B donne :
$X^3-X^2+1 = (X-2)B + (X+3)$, on a donc

$$\frac{X^3-X^2+1}{(X^2+X+1)^2} = \frac{X+3}{(X^2+X+1)^2} + \frac{X-2}{X^2+X+1}$$

d'où $c = 1$, $d = 3$, $a = 1$, $b = -2$.

Chapitre 4 :

Intégration

Dans tout ce chapitre, on considèrera des fonctions dépendant d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui seront continues ou continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

4.1 Propriétés des intégrales

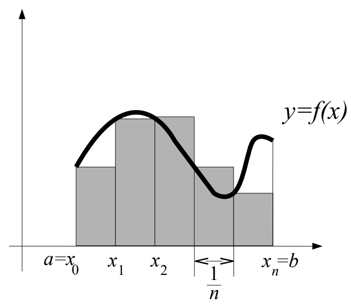
Théorème 4.1.1

Soit f une fonction continue ou continue par morceaux sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$.

Alors f est intégrable (au sens de Riemann) et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ou simplement $\displaystyle\int_a^b f$, son intégrale.

Remarque.

Géométriquement, l'intégrale de f sur $[a, b]$ correspond à l'aire algébrique sous la courbe de f.
Elle peut être vue comme la limite quand n tend vers $+\infty$ de la somme des aires de rectangles de base $1/n$ et de hauteur $f(x_n)$ (voir figure).



Remarque. La variable t employée dans la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est « muette ».

Proposition 4.1.2

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

1. *(**linéarité de l'intégrale**) Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.*
2. *(**croissance de l'intégrale**) Si f est positive, alors $\displaystyle\int_a^b f$ est positive.*
3. $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
4. *si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant \int_a^b g$.*
5. *(**relation de Chasles**) Si $c \in]a, b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*
6. *(**inégalité de Cauchy-Schwarz**)*
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt$$

4.2 Primitives de fonctions continues

Définition 4.2.1

Soit f une application définie sur $[a,b]$, on appelle primitive de f *toute application G dérivable telle que $G' = f$ sur $[a,b]$.*

Théorème 4.2.2 (*Lien entre primitive et intégrale*)

Soit f une application continue sur $[a,b]$. Alors

1. *f admet des primitives ;*
2. *deux primitives de f diffèrent d'une constante additive ;*
3. *f possède une unique primitive prenant en un point donné une valeur donnée :*
   en effet, si $x_0 \in [a,b]$ et si c_0 est donnée dans $\mathbb{R}$, alors la fonction définie par $F : x \longmapsto c_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est une primitive de f telle que $F(x_0) = c_0$ et c'est la seule.
4. *si G est une primitive de f, alors*

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = [G(t)]_a^b$$

Notation. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, et si $x \in [a,b]$, on utilise la notation $\int f(x)dx$ pour désigner la valeur en x d'une primitive de f en x.

4.3 Calculs d'intégrales

Proposition 4.3.1 (*Intégration par parties*)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Théorème 4.3.2 (*Changement de variable : $x = \varphi(t)$*)

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t) \times \varphi'(t)dt$$

4.4 Calculs de primitives de fractions rationnelles

Pour faciliter l'écriture et la lecture, $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ K, \ldots$ désignent toujours une constante réelle (ou complexe). On donne ici une méthode, qui a l'avantage de fonctionner tout le temps mais qui n'est pas toujours la plus rapide. **Penser à bien regarder la forme de la fonction avant de se lancer dans les calculs !**

4.4.1 Élément de première espèce : $\dfrac{1}{(x-\alpha)^n}$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}dx = \begin{cases} \ln|x-\alpha| + K & \text{si } n = 1 \\ \dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + K & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

4.4.2 Élément de deuxième espèce : $\dfrac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}$

Plan du travail.
Soit $F = \dfrac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}$, un élément simple de deuxième espèce. Pour calculer ses primitives :

1. On factorise le dénominateur : $x^2+\alpha x+\beta = constante \times (1+t^2)$
2. On effectue le changement de variable en t
3. On obtient alors une somme d'intégrales du type $U_n = \displaystyle\int \frac{t}{(1+t^2)^n}dt$ et $V_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$.
4. On calcule chaque intégrale séparément :
   ✓ pour U_n c'est de la forme u'/u^n.
   ✓ pour V_n on fait une (ou des) IPP ou un changement de variable.
5. On fait la somme de tout et on change de nouveau de variable si on veut une primitive ou on termine le calcule avec les valeurs aux bornes si c'est une intégrale.

Détails (avec un exemple en même temps) :

Exemple. *Pour calculer* $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}dx$.

1. On factorise le dénominateur

$$x^2+\alpha x+\beta = \delta^2(1+t^2) \qquad \text{avec } \delta = \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} \text{ et } t = \frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\delta}$$

Exemple. *On a* $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$

2. On effectue le changement de variable $t = \dfrac{x+\frac{\alpha}{2}}{\delta}$.

Exemple. *On pose ici* $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ *et on effectue le changement de variable :*
$x = \dfrac{\sqrt{3}t-1}{2}$, $dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}dt$, *pour x variant de 0 à 1, t varie de* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *à* $\sqrt{3}$

$$\int_0^1 \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{3\frac{\sqrt{3}t-1}{2}-1}{\left(\frac{3}{4}(t^2+1)\right)^2}\frac{\sqrt{3}}{2}dt = 4\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt - \frac{20\sqrt{3}}{9}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt$$

3. On se retrouve avec des combinaisons linéaires d'intégrales du type $U_n = \displaystyle\int \frac{t}{(1+t^2)^n}dt$ et $V_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$
4. On calcule les intégrales $U_n(t)$ et $V_n(t)$:
   U_n est de la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ et V_n s'exprime à l'aide de la fonction arctan (si $n=1$) et se calcule par récurrence ou à l'aide d'un changement de variable (si $n>1$) :

$$U_n(t) = \int \frac{t}{(1+t^2)^n}dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)+K & \text{si } n=1 \\ \dfrac{-1/2}{n-1}\dfrac{1}{(1+t^2)^{n-1}}+K & \text{si } n>1 \end{cases}$$

$$V_n(t) = \int \frac{1}{(1+t^2)^n}dt = \begin{cases} \arctan(t)+K & \text{si } n=1 \\ \text{par récurrence ou changement de variable} & \text{si } n>1 \end{cases}$$

Exemple. *On a* $4\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt = 2\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt = 2\left[-\frac{1}{(1+t^2)}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = 1.$

Reste à calculer $\dfrac{20\sqrt{3}}{9}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt.$

Méthode par récurrence. On effectue une intégration par parties, en **partant** de $\displaystyle\int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}dt$.

$$\begin{array}{ll} u'(t)=1 & v(t)=\dfrac{1}{(1+t^2)^{n-1}} \\ u(t)=t & v'(t)=-(n-1)\dfrac{2t}{(1+t^2)^n} \end{array}$$

D'où :

$$\begin{aligned} V_{n-1}=\int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}dt &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}\right]+(n-1)\int \frac{2t^2}{(1+t^2)^n}dt \\ &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}\right]+(n-1)\int \frac{2t^2+2-2}{(1+t^2)^n}dt \\ &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}\right]+2(n-1)V_{n-1}-2(n-1)V_n \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{V_n=\left[\frac{1}{2(n-1)}\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}\right]+\frac{2n-3}{2n-2}V_{n-1}}$$

De proche en proche, on peut revenir à V_1 qui est connue.

> **Exemple.** *Pour trouver* $\displaystyle\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt$*, on effectue une IPP à partir de* $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}dt$ *:*
>
> $$\begin{array}{ll} u'(t)=1 & v(t)=\dfrac{1}{(1+t^2)} \\ u(t)=t & v'(t)=-\dfrac{2t}{(1+t^2)^2} \end{array}$$ *donc*
>
> $$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{t}{1+t^2}+\int \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}dt &= \frac{t}{1+t^2}+\int \frac{2t^2+2-2}{(1+t^2)^2}dt \\ &= \frac{t}{1+t^2}+\int \frac{2t^2+2}{(1+t^2)^2}dt-2\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt \\ &= \frac{t}{1+t^2}+2\int \frac{1}{(1+t^2)}dt-2\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt \end{aligned}$$
>
> *d'où :*
>
> $$\begin{aligned} 2\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt &= \frac{t}{1+t^2}+\int \frac{1}{(1+t^2)}dt \\ \int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt &= \frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+t^2)}dt \end{aligned}$$
>
> $$\begin{aligned} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt &= \left[\frac{t}{2(1+t^2)}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\left[\arctan(t)\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

5. On ajoute tout et on pense à tout exprimer en fonction de x (en cas de calcul de primitive).

> **Exemple.** *On obtient donc :*
>
> $$\int_0^1 \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}dx = 1-\frac{20\sqrt{3}}{9}\times\frac{\pi}{12}=1-\frac{5\pi\sqrt{3}}{27}$$

Méthode par changement de variable : on pose $t=\tan(\theta)$
$dt=(1+\tan^2(\theta))d\theta$ donc $\dfrac{1}{1+t^2}dt=d\theta$
On a alors

$$V_n=\int \frac{1}{(1+t^2)^n}dt=\int \frac{1}{(1+\tan^2(\theta))^{n-1}}d\theta=\int \cos^{2n-2}(\theta)d\theta$$

car $\dfrac{1}{1+\tan^2(\theta)}=\cos^2(\theta)$.
On linéarise et on intègre.

Exemple. *On effectue le changement de variable* $t = \tan(\theta)$, $dt = (1+\tan^2(\theta))d\theta$ *donc* $\dfrac{1}{(1+t^2)^2}dt = \dfrac{1}{(1+\tan^2(\theta))^2}(1+\tan^2(\theta))d\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2(\theta)}d\theta = \cos^2(\theta)d\theta$,
pour t *variant de* $1/\sqrt{3}$ *à* $\sqrt{3}$ *:* θ *varie de* $\arctan(1/\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{6}$ *à* $\arctan(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(\theta)d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

Cette deuxième technique est plus rapide si n n'est pas trop grand et qu'on est habile pour linéariser. Mais elle présente l'inconvéniant de ne pas donner le résultat sous une forme très lisible en cas de calcul de primitive. Dans ce cas, il est souvent plus intéressant d'appliquer l'autre méthode.

4.5 Intégrales se ramenant à des fractions rationnelles

4.5.1 Intégrales de fonctions rationnelles de fonctions trigonométriques

$$I = \int_a^b F(\cos x, \sin x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Pour calculer I **on se ramène par changement de variable à une fonction rationnelle.**

On peut *toujours* faire le changement de variable $\boxed{t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Rappel. Si on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, alors : $\boxed{\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2} \quad \sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2} \quad \cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$

Exemple. *Pour calculer* $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}dx$. *On pose* $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ *on a* $dt = \dfrac{1}{2}(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right))dx$ *donc* $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ *et* $\dfrac{1}{\sin(x)}dx = \dfrac{1+t^2}{2t}\dfrac{2}{1+t^2}dt = \dfrac{1}{t}dt$.

$$I = \Big[ln|t|\Big]_{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}^{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \ln|1| - \ln\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln(3)$$

Dans certains cas, on peut faire des changements de variable plus judicieux.

Proposition 4.5.1 (*Règles de Bioche*)
On note $g(x) = f(x)dx$ *le groupe différentiel qui nous intéresse.*
Si $g(x) = g(-x)$, *on peut effectuer le changement de variable* $t = \cos(x)$
Si $g(x) = g(\pi - x)$, *on peut effectuer le changement de variable* $t = \sin(x)$
Si $g(x) = g(\pi + x)$, *on peut effectuer le changement de variable* $t = \tan(x)$

4.5.2 Fractions rationnelles en $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$

En général, on effectue le changement de variable $\boxed{t = \mathrm{e}^x}$.

Exemple.

$$I=\int \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x)}dx=\int \frac{2}{2+e^x+e^{-x}}dx=\int \frac{2e^x}{2e^x+e^{2x}+1}dx$$

on pose $t=e^x$, $dt=e^x dx$

$$I=\left[\int \frac{2}{(1+t)^2}dt\right]_{x=\ln|t|}=\left[\frac{-1}{1+t}\right]_{x=\ln|t|}=\frac{-1}{1+e^x}+k \text{ avec } k\in\mathbb{R}$$

4.5.3 Calcul de $\int R\left(x,\sqrt{\alpha x+\beta}\right)dx$

On suppose que R est une fraction rationnelle .

On effectue le **changement de variable :** $\boxed{t=\sqrt{\alpha x+\beta}}$

on a $t^2=\alpha x+\beta$, donc $2tdt=\alpha dx$.

Exemple. *Pour calculer* $\int_0^2 x\sqrt{2x+1}dx$, *on pose* $t=\sqrt{2x+1}$, *d'où* $t^2=2x+1$ *et* $2tdt=2dx$ *d'où* $tdt=dx$.
Pour x *variant de* 0 *à* 2, t *varie de* 1 *à* $\sqrt{5}$.
De plus $x\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}(t^2-1)t\times tdt=\left(\frac{t^4}{2}-\frac{t^2}{2}\right)dt$
d'où

$$\int_0^2 x\sqrt{2x+1}dx=\int_1^{\sqrt{5}}\left(\frac{t^4}{2}-\frac{t^2}{2}\right)dt=\left[\frac{t^5}{10}-\frac{t^3}{6}\right]_1^{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{3}+\frac{1}{15}$$

4.5.4 Calcul de $\int R\left(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right)dx$

où R est une fraction rationnelle.

1. Factorisation de la fonction polynômiale sous forme :

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\delta(t^2\pm 1)$$

le signe de α détermine le signe de δ, le signe avant le 1 est déterminer par le signe de Δ, le discriminant de la fonction polynômiale.

2. Il y a 3 cas de figures, correspondant à des changements de variables différents :
   (a) Si $\Delta<0$, on a une intégrale de la forme $\int R\left(t,\sqrt{1+t^2}\right)dt$.
   On pourra alors utiliser le changement de variable $\boxed{t=\operatorname{sh}u}$.
   (b) Si $\Delta>0$ et $a<0$, on a une intégrale de la forme $\int R\left(t,\sqrt{1-t^2}\right)dt$.
   On pourra alors utiliser les changements de variable $\boxed{t=\sin u \text{ ou } t=\cos u}$.
   (c) Si $\Delta>0$ et $a>0$, on a une intégrale de la forme $\int R\left(t,\sqrt{t^2-1}\right)dt$.
   ✓ Si $t\geqslant 1$, on pourra alors utiliser le changement de variable $\boxed{t=\operatorname{ch}u}$;
   ✓ Si $t\leqslant -1$, on pourra alors utiliser le changement de variable $\boxed{t=-\operatorname{ch}u}$.
3. Intégrer et penser à revenir en fonction de x.

Exemple. *Calcul de* $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{(x+2)^2+1}}dx$.
On pose $x+2=\operatorname{sh}(u)$, *on a* $(x+2)^2+1=\operatorname{sh}^2(u)+1=\operatorname{ch}^2(u)$ *et* $dx=\operatorname{ch}(u)du$, *donc*

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx&=\int \frac{\operatorname{sh}(u)-2}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(u)}}\operatorname{ch}(u)du \overset{\operatorname{ch}(u)>0}{=} \int \operatorname{sh}(u)-2du\\&=\left[\operatorname{ch}(u)-2u\right]_{u=\operatorname{argsh}(x+2)}=\left[\sqrt{\operatorname{sh}^2(u)+1}-2u\right]_{u=\operatorname{argsh}(x+2)}\\&=\sqrt{x^2+4x+5}-2\operatorname{argsh}(x+2)+k \text{ avec } k\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Chapitre 5 :

Algèbre linéaire

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en fait, la plupart des notions définies peuvent l'être avec $\mathbb{K}$ un corps.

5.1 Espaces vectoriels

5.1.1 Définition

Définition 5.1.1

Soit E un ensemble, on dit que $(E,+,\cdot)$ est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ *ou* **$\mathbb{K}$-ev** *si*

- ✓ *$(E,+)$ est un groupe abélien (autrement dit commutatif). C'est-à-dire :*
  1. *$+$ est associative*
  2. *$+$ possède un neutre, noté 0_E*
  3. *chaque élément de E possède un symétrique par $+$ (le symétrique de x est noté $-x$)*
  4. *$+$ est commutative*
- ✓ *$\cdot$ est une loi de composition externe de domaine d'opérateur $\mathbb{K}$ vérifiant*
  1. $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$
  2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E,\ \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
  3. $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
  4. $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

Si E est un $\mathbb{K}$-ev, les éléments de E sont appelés **vecteurs** *et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés* **scalaires**.

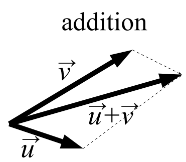
Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de la définition.

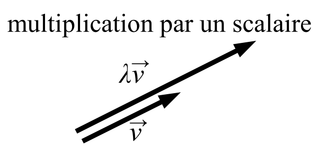
Proposition 5.1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, alors :
1. $\forall x \in E,\ 0 \cdot x = 0_E$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $\forall (\lambda,x) \in \mathbb{K} \times E,\ \lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow (x = 0_E$ *ou* $\lambda = 0)$
4. $\forall (\lambda,x) \in \mathbb{K} \times E,\ \lambda \cdot (-x) = (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$

Exemples :

✓ L'ensemble des vecteurs géométriques du plan est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec les lois suivantes :





✓ $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ avec comme addition, l'addition coefficient par coefficient et comme multiplication, la multiplication de chaque coefficient par le scalaire, est un $\mathbb{K}$-ev.

✓ $\mathbb{K}^n$ muni des lois suivantes dites « lois produits » est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\forall\,((u_1,\dots,u_n),\ (v_1,\dots,v_n)) \in \left(\mathbb{K}^n\right)^2, \quad \forall\lambda \in \mathbb{K}&\\ (u_1,\dots,u_n)+(v_1,\dots,v_n) = (u_1+v_1,\dots,u_n+v_n)&\\ \lambda.(u_1,\dots,u_n) = (\lambda.u_1,\dots,\lambda.u_n)&\end{aligned}$$

✓ L'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication par une constante réelle usuelles.

5.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 5.1.3

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel (sev) de** *E si F muni de la restriction des lois $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-ev.*

Bien que ce ne soit pas précisé explicitement dans la définition, F doit en premier lieu être stable par les deux lois, et de ce fait, il contient obligatoirement l'élément neutre de $+$. Pour ne pas avoir à vérifier toutes les propriétés énoncées dans la définition d'un espace vectoriel, on utilise la caractérisation suivante des sous-espaces vectoriels :

Théorème 5.1.4

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. Alors F est un sev de E si et seulement si F est non vide et stable par combinaison linéaire :

$$\forall\lambda \in \mathbb{K},\ \forall(x,y) \in F^2,\ \lambda \cdot x + y \in F$$

Exemples :

✓ $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

✓ Si E est un $\mathbb{K}$-ev et si $u_1,\dots,u_n$ sont des vecteurs de E, alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces n vecteurs est un sev de E, c'est le ***sous-espace vectoriel engendré par*** la famille $\{u_1,\dots,u_n\}$:

$$\mathrm{Vect}(\{u_1,\dots,u_n\}) = \left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k \middle| (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$$

✓ L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I,\mathbb{R})$, noté $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

5.1.3 Bases et dimension

Définition 5.1.5

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E. Considérons $\{v_1,\dots,v_p\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\{v_1,\dots,v_p\}$ est **une famille génératrice de** *F ssi $F = \mathrm{Vect}(\{v_1,\dots,v_p\})$.*

Définition 5.1.6

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, on dit que E est **de dimension finie** *s'il possède une famille génératrice finie.*

On connaît par ailleurs des espaces vectoriels ne possédant pas de famille génératrice finie, dans ce cas, on dit qu'ils sont ***de dimension infinie***, comme par exemple $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ ou $\mathbb{K}[X]$.

Définition 5.1.7

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $\{v_1,\dots,v_p\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\{v_1,\dots,v_p\}$ est **libre** *si*

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i = 0_E \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}$$

Par définition, une ***base*** de E est une famille à la fois **libre et génératrice** de E.

Théorème 5.1.8

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension finie admet une base et toutes ses bases ont le même nombre d'éléments n. On appelle alors ce nombre la **dimension de** E.

De plus on peut caractériser les bases de la façon suivante :
$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *est une base de E si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe un* **unique** *n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que*

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

Ce n-uplet s'appelle les **coordonnées** *ou* **composantes** *de x dans la base $\mathcal{B}$.*

Ne pas confondre le nombre d'éléments d'un espace vectoriel et sa dimension. Par exemple $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n+1$ qui comporte un nombre infini d'éléments.

Remarque. L'ensemble $\{0_E\}$ est un sev de E qui ne possède pas de base car aucune famille de vecteurs n'est libre, par convention sa dimension est égale à 0.

Exemples :

- ✓ Toute famille de deux vecteurs non colinéaires forme une base du plan des vecteurs géométriques « usuels ».
  De même toute famille de trois vecteurs non co-planaires forme une base de l'espace à trois dimensions des vecteurs géométriques.
- ✓ La famille $\big((1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
  Les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ dans cette base sont $1, 2, 3$.
  en effet $(1,2,3) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1)$.
- ✓ La famille $\big((1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,0,-3)\big)$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$.
  Les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ dans cette base sont $0, 2, -1$
  en effet $(1,2,3) = 0(1,0,0) + 2(1,1,0) - 1(1,0,-3)$.
- ✓ La famille $\big(1, X, X^2, X^3, X^4\big)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

Proposition 5.1.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n alors :

1. *Une famille libre ne peut pas avoir plus de n éléments.*
2. *Une famille génératrice ne peut pas avoir moins de n éléments.*
3. *Toute famille libre ayant n éléments est une base de E.*
4. *Toute famille génératrice ayant n éléments est une base de E.*

5.2 Applications linéaires

5.2.1 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition 5.2.1 (*Rappel sur les applications*)

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles.

1. *On dit que f est* **injective** *si tout élément de F admet un maximum un antécédent.*
   « f est injective si et seulement si elle ne prend pas deux fois la même valeur »
2. *On dit que f est* **surjective** *si tout élément de F admet au moins un antécédent.*
   « f est surjective si et seulement si elle prend toutes les valeurs possibles dans F »
3. *On dit que f est* **bijective** *si tout élément de F admet exactement un antécédent.*
   « f est bijective si et seulement si elle prend toutes les valeurs de F une et une seule fois »
   Une application est donc bijective si et seulement si elle est injective et bijective.

5.2.2 Définition

Définition 5.2.2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Considérons une application φ de E vers F. On dit que φ est une **application linéaire** *ou un* **morphisme d'espaces vectoriels** *si*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

- ✓ *Si $E = F$, on note $\mathcal{L}(E)$ à la place de $\mathcal{L}(E,E)$,*
  un élément de $\mathcal{L}(E)$ est appelé un **endomorphisme de** E.
- ✓ *Si $F = \mathbb{K}$, on dit que $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ est une* **forme linéaire**.
- ✓ *Si $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, on dit que c'est un* **isomorphisme**.
- ✓ *Un endomorphisme bijectif est appelé un* **automorphisme**.

Proposition 5.2.3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, alors

1. $\varphi(0_E) = 0_F$.
2. $\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n,\ \forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\varphi(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 \varphi(u_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(u_n)$$

5.2.3 Noyau et Image d'une application linéaire

Définition 5.2.4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.

- ✓ *L'***image de** φ *est le sev de F défini par*

$$\mathit{Im}\ (\varphi) = \varphi(E) = \big\{ y \in F \mid \exists x \in E,\ \varphi(x) = y \big\}$$

- ✓ *Le* **noyau de** φ *est le sev de E défini par*

$$\mathit{Ker}\ (\varphi) = \varphi^{-1}(\{0_F\}) = \big\{ x \in E \mid \varphi(x) = 0_F \big\}$$

Théorème 5.2.5

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. *φ est surjective ssi $\mathit{Im}\ (\varphi) = F$ (définition usuelle de la surjectivité).*
2. *φ est injective ssi $\mathit{Ker}\ (\varphi) = \{0_E\}$.*

Théorème 5.2.6 (*Théorème du rang*)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose de plus que E est de dimension finie alors

$$\dim(\mathit{Ker}\ (\varphi)) + \dim(\mathit{Im}\ (\varphi)) = \dim E$$

Dans le cas des endomorphismes, on en déduit le résultat suivant.

Théorème 5.2.7

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\varphi \text{ injective } \Leftrightarrow \varphi \text{ surjective} \Leftrightarrow \varphi \text{ bijective}$$

5.3 Matrices

5.3.1 Matrice d'une application linéaire

On note $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On peut définir la matrice d'une application linéaire $\varphi : E \to F$ relativement à une base $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F.

Définition 5.3.1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$. On munit E d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_p\}$ et F d'une base $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit la **matrice de φ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$**, *notée* $\mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ *de la manière suivante :*
$\mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *est la matrice dont la j-ième colonne représente les coordonnées de $\varphi(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \varphi(e_1) & & & \varphi(e_j) & & \varphi(e_p) & \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \\ \mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \varepsilon_1 \\ \leftarrow \varepsilon_2 \\ \quad\vdots \\ \quad\vdots \\ \leftarrow \varepsilon_n \end{array} \end{array}$$

Alors, si on fixe des bases de E et de F, une matrice A caractérise de manière unique une application linéaire φ telle que $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{C})$. De plus il y a compatibilité entre les opérations sur les matrices et les opérations sur les applications linéaires correspondantes (le produit des matrices correspondant à la composition des applications linéaires).

5.3.2 Matrices inversibles

Définition 5.3.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est **inversible** *s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Dans ce cas, B est appelée* **inverse** *de A et notée A^{-1}.*

Proposition 5.3.3

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et toute $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telles que $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, A est inversible si et seulement si φ est un automorphisme et dans ce cas

$$A^{-1} = \mathrm{mat}(\varphi^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$

5.3.3 Matrices de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, on suppose que E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
On construit dans E une nouvelle base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ telle que :

pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $(a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$, composantes de e'_j dans la base $\mathcal{B}$:

$$e'_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} . e_k$$

Notons alors $P = \mathrm{pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont ces coordonnées. Cette matrice est appelée ***matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$***. On a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} e'_1 & & e'_j & & e'_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ P = \mathrm{pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathrm{mat}(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = & \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \quad\vdots \\ \quad\vdots \\ \leftarrow e_n \end{array} \end{array}$$

Proposition 5.3.4

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. Notons $P = \mathrm{pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, alors

$$\mathrm{pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = P^{-1}$$

Théorème 5.3.5 (*Changement de base pour un endomorphisme*)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. Notons $P = \mathrm{pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telles que $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ et $B = \mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$, on a

$$A = PBP^{-1} \quad \text{et} \quad B = P^{-1}AP$$

*On dit que A et B sont **semblables**.*

5.4 Déterminant des matrices carrées

Le déterminant d'une matrice carrée (ou d'une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension n) est un outil permettant de savoir si la matrice est inversible ou non. Il généralise en dimension n la notion de volume engendré par une famille de vecteurs (en l'occurance, les vecteurs colonnes ou lignes de la matrice).

Définition 5.4.1

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A)$ est un élément de $\mathbb{K}$.
On l'obtient en faisant la somme algébrique (avec des signes + ou -) de tous les produits possibles de n coefficients de A où l'on choisit un et un seul coefficient par ligne et par colonne de A ; on met un + si le nombre de permutations des indices est paire et un moins sinon.

Exemples :

✓ Pour $n = 2$: $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$

✓ Pour $n = 3$: $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_3\beta_2\gamma_1$

Remarque. Cette définition est inexploitable pour faire le calcul explicite d'un déterminant. Pour cela, on procède par récurrence sur la taille de la matrice en faisant des *développements* par rapport à une ligne ou à une colonne. (voir plus loin pour le calcul du déterminant).

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs exprimés dans une base $\mathcal{B}$. On écrit la matrice A des coordonnées dans base $\mathcal{B}$ des vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ placées en colonne et on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det(A)$$

Le déterminant possède les propriétés suivantes :

Proposition 5.4.2

1. *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.*
2. $\det(I_n) = 1$
3. *Soient $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$, $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \quad \det(A^m) = \det(A)^m, \quad \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad \text{et} \quad \det({}^tA) = \det(A)$$

5. *Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs exprimés dans une base $\mathcal{B}$. $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$.*

⚠ *En général* $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

5.4.1 Précisions sur les techniques de calcul

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, on note Δ_{ij} le ***cofacteur de*** a_{ij}, c'est le déterminant de la matrice carrée de taille $(n-1)$ obtenue à partir de A en barrant la i-ième ligne et la j-ième colonne.

✓ Les lignes et les colonnes jouent le même rôle dans le calcul d'un déterminant, on peut dont manipuler aussi bien les lignes que les colonnes pour faire apparaître des 0, et choisir aussi bien une ligne qu'une colonne pour faire le développement du déterminant.

Développement de $\det(A)$ *suivant les termes de la j-ième colonne :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}$$

Développement de $\det(A)$ *suivant les termes de la i-ième ligne :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}$$

✓ Si la famille des vecteurs colonnes (ou des vecteurs lignes !) est liée alors le déterminant est nul.
✓ Si on permute deux colonnes ou deux lignes, le déterminant change de signe.
✓ Le déterminant ne change pas si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des ***autres*** colonnes (resp. lignes).
✓ Si on multiple une colonne (resp. une ligne) par $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le déterminant est multiplié par λ.
✓ Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.

Exemple :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 2\times(-1)^{3+4}\times 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{(développement par rapport à la 3-ième col)}\\
&= -6\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1\\ -7 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} (C_1 \text{ reçoit } C_1 - 3C_3)\\
&= -6\left[(-1)^{3+3}\times 1\begin{vmatrix} -2 & 2\\ -7 & 1 \end{vmatrix}\right] \text{(développement par rapport à la 3-ième ligne)}\\
&= -6\,[-2\times 1 - (-7)\times 2] = -72
\end{aligned}$$

5.5 Diagonalisation des endomorphismes et matrices carrées

5.5.1 Éléments propres

Définition 5.5.1 (*Point de vu des endomorphismes*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. *On dit que $x \in E$ est un* **vecteur propre de** φ *si*

$$\begin{cases} x \neq 0_E \\ \exists\lambda \in \mathbb{K},\ \varphi(x) = \lambda x \end{cases}$$

2. *On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une* **valeur propre de** φ *s'il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$ et $\varphi(x) = \lambda x$.*
   Un tel vecteur x est un vecteur propre de φ, on dit qu'il est **associé à** *la valeur propre λ.*
3. *Soit λ une valeur propre de φ, alors on appelle* **sous-espace propre associé à** λ, *l'ensemble E_λ défini par*

$$E_\lambda = \{x \in E \mid \varphi(x) = \lambda x\} = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_E)$$

   C'est un sev de E qui contient 0_E et tous les vecteurs propres associés à λ.

Définition 5.5.2 (*Point de vu matriciel*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *On dit que $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est un **vecteur propre de** A si*

$$\begin{cases} X \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ AX = \lambda X \end{cases}$$

2. *On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de** A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.*
   *Un tel vecteur X est un vecteur propre de A, on dit qu'il est **associé à** la valeur propre λ.*
3. *Soit λ une valeur propre de φ, alors on définit E_λ, le **sous-espace propre associé à** λ par*

$$E_\lambda = \left\{X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; AX = \lambda X\right\} = \mathrm{Ker}\,\left(A - \lambda I_n\right)$$

Proposition 5.5.3

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telles que $A = \mathrm{mat}\,(\varphi, \mathcal{B})$ alors les propositions suivantes sont équivalentes

1. *λ est une valeur propre de φ*
2. *λ est une valeur propre de A*
3. $\det(A - \lambda I_n) = 0$

5.5.2 Polynôme caractéristique, endomorphismes (matrices) diagonalisables

Définition 5.5.4

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ (resp. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), le polynôme caractéristique de φ (resp. de A) est le polynôme noté P_φ (resp. P_A) défini par

$$P_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda \mathrm{id}_E) \quad \left(\textit{resp. } P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)\right)$$

Proposition 5.5.5

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

1. *P_A est un polynôme de degré n, et on a*

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\Big)\lambda^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + \det(A)$$

2. *A possède au maximum n valeurs propres distinctes qui sont les racines de P_A.*

Définition 5.5.6

*Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ on dit que φ est **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de φ.*

Si $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ est une telle base alors

$$\mathrm{mat}\,(\varphi, \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres associées à $v_1, \dots, v_n$, (elles ne sont pas forcément distinctes les unes des autres).

Proposition 5.5.7

*Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ alors φ est **diagonalisable** si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale, où A est la matrice représentant φ dans une base donnée.*

Proposition 5.5.8

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
Si φ admet n valeurs propres distintes alors φ est diagonalisable.

5.5.3 Ordre de multiplicité et dimension des sous-espaces propres

Définition 5.5.9

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit λ_0 une racine de P, alors, on peut écrire :

$$P = (X - \lambda_0)^{\alpha_0} Q$$

où $\alpha_0 \in \{1, \ldots, \deg(P)\}$ et $Q(\lambda_0) \neq 0$.
*α_0 s'appelle l'**ordre de multiplicité** ou **multiplicité** de λ_0 dans P.*

Théorème 5.5.10

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, soient λ_0 une valeur propre de φ et α_0 sa multiplicité dans P_φ, alors

$$1 \leqslant \dim(E_{\lambda_0}) \leqslant \alpha_0$$

Théorème 5.5.11 (*Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
φ est diagonalisable si et seulement si les deux propositions suivantes sont vérifiées :

1. *P_φ est scindé, c'est-à-dire qu'il admet n racines comptées avec leur multiplicité, autrement dit, s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$ tous distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des entiers strictement positifs tels que*

$$P_\varphi = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda)^{\alpha_k} \quad \text{avec } \alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$$

2. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\dim(E_{\lambda_i}) = \alpha_i$.*

5.5.4 Cas des matrices symétriques réelles

Proposition 5.5.12

Toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique à coefficients réels sont réelles.

Remarque. Ceci implique que le polynôme caractérisque d'une matrice symétrique réelle est obligatoirement scindé.

Théorème 5.5.13

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée pour le produit scalaire usuel. Autrement dit, si M est une matrice symétrique réelle, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telle que :

$$M = PDP^{-1} = PD^tP$$

Chapitre 6 :

Équations différentielles

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 6.1.1

- ✓ *Une* **équation différentielle linéaire du premier ordre** *est une équation de la forme*

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad (E)$$

où a et b sont des fonctions ***continues*** *sur un intervalle I.*
- ✓ *On appelle* **équation homogène associée à** (E) *l'équation (EH) définie par*

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \qquad (EH)$$

- ✓ *la fonction b est appelée* **second membre de l'équation** (E).
- ✓ *Si J est un intervalle inclus dans I, on dit que f est une solution de (E) sur J si f est une fonction* ***dérivable sur*** *J qui vérifie l'équation (E) sur J.*

Remarque. S'il y a un coefficient devant $y'(x)$, on doit se placer sur un intervalle où le coefficient ne s'annule pas et diviser toute l'équation par ce coefficient, on étudie alors l'équation sur chaque intervalle.

Théorème 6.1.2

Soient (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec les notations de la Définition **??** *et (EH) son équation homogène associée. Soit J un intervalle.*
On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de toutes les solutions de (EH) sur J et $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les solutions de (E) sur J.
Alors si f_0 est une solution de (E) sur J, on obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant à f_0 les solutions de (EH).
Autrement dit

$$\mathcal{S} = \left\{ f_0 + g \;\middle|\; g \in \mathcal{S}_H \right\}$$

Vocabulaire. On dit que f_0 est une ***solution particulière de*** (E) ***sur*** J et pour d'écrire l'ensemble de toutes les solutions de (E), on parle de la ***solution générale de*** (E) ***sur*** J.

Plan de travail pour résoudre une équation linéaire d'ordre 1 :
- ✓ On résout l'équation homogène associée.
- ✓ On cherche une solution particulière de (E).
- ✓ On ajoute les deux pour obtenir toutes les solutions de (E).
- ✓ On s'intéresse aux possibilités de recollement des solutions d'un intervalle à l'autre (s'il y avait un coefficient devant y' et qu'on a eu besoin de découper $\mathbb{R}$ en intervalles où il ne s'annule pas).

6.1.1 Résolution de l'équation homogène (EH)

Considérons une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) avec les notations de la Définition **??**. On peut alors écrire l'équation (EH) :

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \qquad (EH)$$

Théorème 6.1.3

L'ensemble des solutions de (EH) est donné par

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \longmapsto \alpha e^{-F(t)} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{K} \right\}$$

où F est une **primitive** *de a sur I.*

Vocabulaire. On dit que l'application $t \longmapsto \alpha e^{-F(t)}$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$ est la ***solution générale de l'équation homogène*** (EH)***sur*** I.

6.1.2 Recherche d'une solution particulière

On peut dans un premier temps regarder s'il y a une solution particulière « évidente », si ce n'est pas le cas, on dispose d'outils pour en déterminer une.

Lorsque le second membre est une somme de fonctions simples.

Théorème 6.1.4 (*Principe de superposition*)

Soient a, b_1, b_2, $\dots, b_n$ des fonctions continues sur un intervalle I. On note (E_1), $(E_2), \dots,$ (E_n), et (E) les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{rcll} y'(x) + a(x)y(x) &=& b_1(x) & (E_1) \\ y'(x) + a(x)y(x) &=& b_2(x) & (E_2) \\ \vdots & & \vdots & \\ y'(x) + a(x)y(x) &=& b_n(x) & (E_n) \\ y'(x) + a(x)y(x) &=& b(x) & (E) \end{array}$$

où $b = b_1 + \cdots + b_n$.

Si pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, f_j est une solution particulière de (E_j) sur I alors $f = f_1 + \cdots + f_n$ est une solution particulière de (E) sur I.

Ce théorème permet de découper le problème en cas plus simples, il ne reste qu'à ajouter les différentes solutions particulières.

Quelques cas particuliers de second membres. On résout : $y'(x) + ay(x) = b(x)$ avec a une constante.

- ✓ **si $b = P$ est une fonction polynomiale de degré n :**
  on cherche une solution particulière $f_0 = Q$ où Q est une fonction polynomiale de degré $\begin{cases} n & \text{si } a \neq 0, \\ n+1 & \text{si } a = 0. \end{cases}$
- ✓ **si $b : x \longmapsto P(x)e^{\lambda x}$ où P est une fonction polynomiale de degré n et λ est une constante réelle ou complexe :**
  on cherche une solution particulière $f_0 : x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ où Q est une fonction polynomiale de degré $\begin{cases} n & \text{si } -a \neq \lambda, \\ n+1 & \text{si } -a = \lambda. \end{cases}$

Remarque. Ce dernier cas permet également de trouver des solutions particulières pour un second membre de la forme $x \mapsto P(x)\cos(\alpha x)$ (ou avec un sinus), il suffit d'utiliser les formules d'Euler : $\cos(\alpha x) = \dfrac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}$ et de l'appliquer deux fois, avec $\lambda = i\alpha$ puis avec $\lambda = -i\alpha$

La méthode de la « variation de la constante ».
Soit (E) une équation différentielle linéaire du premier ordre avec les notations de la Définition **??**. On a vu que les solutions de (EH), l'équation homogène associée à (E) s'écrivent $y : x \mapsto \lambda e^{-F(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y_0 : x \longmapsto \lambda(x)e^{-F(x)}$$

la constante de la solution générale de (EH) étant remplacée par une fonction (d'où le nom de la méthode ☺).

On dérive : pour $x \in I$ $y_0'(x) = \lambda'(x)e^{-F(x)} - \lambda(x)F'(x)e^{-F(x)} = \lambda'(x)e^{-F(x)} - \lambda(x)a(x)e^{-F(x)}$

En plaçant y_0 et y_0' dans (E), on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} b(x) = y_0'(x) + a(x)y_0(x) &= \lambda'(x)e^{-F(x)} - \lambda(x)a(x)e^{-F(x)} + a(x)y_0(x) \\ &= \lambda'(x)e^{-F(x)} \end{aligned}$$

On obtient alors : $\boxed{\lambda'(x) = b(x)e^{F(x)}}$

Il reste à intégrer pour trouver une fonction λ qui convient.
Cette méthode fonctionne toujours pour trouver une solution particulière à condition de savoir calculer cette primitive.

6.1.3 Recollement

Si l'équation différentielle est de la forme :

$$\forall x \in I \ \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x) \qquad (E)$$

On peut résoudre l'équation sur chaque sous-intervalle de I où la fonction α ne s'annule pas, il suffit de tout diviser par $\alpha(x)$ pour obtenir une équation de la forme de la Définition **??**. On peut alors chercher s'il existe une (ou plusieurs) solutions définies sur l'intervalle entier en cherchant à recoller les solutions entre elles.

Il faut que la fonction obtenue soit
- ✓ continue sur I et en particulier au point de recollement, (on étudie la limite à gauche et à droite)
- ✓ dérivable sur I et en particulier au point de recollement, (on étudie la limite à gauche et à droite du taux d'accroissement)
- ✓ vérifie (E) sur I et en particulier au point de recollement.

6.1.4 Conditions initiales

Théorème 6.1.5
Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec les notations de la Définition **??**.
Si $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ alors il existe une unique solution f de (E) sur I vérifiant $f(t_0) = y_0$.

6.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 6.2.1

- ✓ *Une* **équation différentielle linéaire du second ordre (ou *d'ordre 2*) à coefficients constants** *est une équation de la forme*

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \qquad (E)$$

où a, b, c sont des constantes réelles ou complexes et d est une fonction **continue** *sur un intervalle I.*
- ✓ *On appelle* **équation homogène associée à** (E) *l'équation (EH) définie par*

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \qquad (EH)$$

- ✓ *la fonction d est appelée* **second membre de l'équation** (E).
- ✓ *Soit J un intervalle inclus dans I, on dit que f est une* **solution de** (E) **sur** J *si f est dérivable deux fois sur J et qu'elle vérifie l'équation (E) en tout point de J.*

Remarque. On notera que pour les équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, la fonction d n'est pas supposée constante. Ce type d'équation est fréquemment rencontré en mécanique par exemple pour une masse reliée à un ressort soumis à une force dans l'axe du ressort.

Théorème 6.2.2

Soient (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec les notations de la Définition **??** *et (EH) son équation homogène associée. Soit J un intervalle.*
On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de toutes les solutions de (EH) sur J et $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les solutions de (E) sur J.
Alors si f_0 est une solution de (E) sur J, on obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant à f_0 les solutions de (EH).
Autrement dit

$$\mathcal{S} = \left\{ f_0 + g \;\middle|\; g \in \mathcal{S}_H \right\}$$

Plan de travail pour résoudre une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
✓ On résout l'équation homogène associée.
✓ On cherche une solution particulière de (E).
✓ On ajoute les deux pour obtenir toutes les solutions de (E).

6.2.1 Résolution de l'équation homogène

Définition 6.2.3

Soit (EH) une équation homogène donnée par

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ *avec* $a \neq 0$.
On appelle **équation caractéristique** *de (EH) (et de (E)) l'équation polynomiale du second degré :*

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (\star)$$

On note Δ son discriminant.

Théorème 6.2.4 (*Les solutions de l'équation homogène*)

1. *Les solutions à valeurs complexes de (EH) sont données par (ici a, b et c peuvent être réels ou complexes) :*
   ✓ *Si $\Delta \neq 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines complexes distinctes de $(\star)$, et on a*

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

   ✓ *Si $\Delta = 0$, on note r la racine complexe double de $(\star)$, et on a*

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto (\lambda x + \mu) e^{rx} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

2. *Les solutions à valeurs réelles de (EH) sont données par (dans ce cas a, b et c sont obligatoirement des réels) :*
   ✓ *Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de $(\star)$, et on a*

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

   ✓ *Si $\Delta < 0$, on note $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées distinctes de $(\star)$, et on a*

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto e^{\alpha x} \left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x) \right) \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

   ✓ *Si $\Delta = 0$, on note r la racine réelle double de $(\star)$, et on a*

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto (\lambda x + \mu) e^{rx} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

6.2.2 Recherche d'une solution particulière

La recherche se fera de façon analogue à ce qui a été fait pour les équations différentielle linéaire d'ordre 1. Le principe de superposition est vérifié aussi, mais la méthode de « variation des constantes » est un peu plus compliquée à comprendre et à mettre en œuvre (utilisation des matrices, voir plus loin). On commencera donc par traiter quelques cas particulier de second membre.

Théorème 6.2.5 (*Principe de superposition*)

Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et $d_1, d_2, \ldots, d_n$ des fonctions continues sur un intervalle I. On note $(E_1), (E_2), \ldots, (E_n)$, et (E) les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= d_1(x) \quad (E_1) \\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= d_2(x) \quad (E_2) \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= d_n(x) \quad (E_n) \\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= d(x) \quad (E) \end{aligned}$$

où pour tout $x \in I$, $d(x) = d_1(x) + \cdots + d_n(x)$.

Si pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, f_j est une solution particulière de (E_j) sur I alors $f = f_1 + \cdots + f_n$ est une solution particulière de (E) sur I.

Quelques cas particuliers de second membres. On résout : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$ où a, b, c sont des constantes.

✓ **si $d = P$ est une fonction polynomiale de degré n** :

on cherche une solution particulière $f_0 = Q$ où Q est une fonction polynomiale de degré $\begin{cases} n & \text{si } c \neq 0, \\ n+1 & \text{si } c = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ n+2 & \text{si } c = 0 \text{ et } b = 0. \end{cases}$

✓ **si $d : x \longmapsto P(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ où P est une fonction polynomiale de degré n et $\lambda \in \mathbb{K}$** :

on cherche une solution particulière $f_0 : x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ où Q est une fonction polynomiale de degré $\begin{cases} n & \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de } (\star), \\ n+1 & \text{si } \lambda \text{ est racine simple de } (\star), \\ n+2 & \text{si } \lambda \text{ est racine double de } (\star). \end{cases}$

Remarque. Ce dernier cas permet également de trouver des solutions particulières pour un second membre de la forme $x \mapsto P(x)\cos(\alpha x)$ (ou avec un sinus), il suffit d'utiliser les formules d'Euler : $\cos(\alpha x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}}{2}$ et de l'appliquer deux fois, avec $\lambda = \mathrm{i}\alpha$ puis avec $\lambda = -\mathrm{i}\alpha$

6.2.3 Conditions initiales

Théorème 6.2.6

*Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec les notations de la Définition **??**, on suppose que la fonction a ne s'annule pas sur I.*
Si $(t_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{K}^2$ alors il existe une unique solution f de (E) sur I vérifiant $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = z_0$.

6.2.4 Méthode de variation des constantes

Les solutions de l'équation homogène forment un espace vectoriel de dimension 2 (cf Théorème **??**), toute solution de l'équation homogène s'écrit donc : $\varphi : x \mapsto \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)$.

On cherche les solutions de l'équation complète sous forme :

$$y : x \mapsto \alpha_1(x)\varphi_1(x) + \alpha_2(x)\varphi_2(x)$$

Pour comprendre comment obtenir α_1 et α_2, on utilise les systèmes différentiels.
On va donc écrire notre équation sous forme d'un système différentiel linéraire d'ordre 1.

$$(E) \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \iff aX'(x) = AX(x) + B(x)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -c & -b \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ d(x) \end{pmatrix}$ et $X(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$

Si on pose $X_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix}$, on obtient :

$$X(x) = \alpha_1(x)X_1(x) + \alpha_2(x)X_2(x)$$
$$X'(x) = \alpha_1'(x)X_1(x) + \alpha_1(x)X_1'(x) + \alpha_2'(x)X_2(x) + \alpha_2(x)X_2'(x)$$

Ainsi X est solution du système différentiel si et seulement si :

$$aX'(x) = AX(x) + B(x) \iff a\alpha_1'(x)X_1(x) + a\alpha_2'(x)X_2(x) = B(x) \text{ après simplification}$$

Ce qui donne le système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} a\alpha_1'(x)\varphi_1(x) + a\alpha_2'(x)\varphi_2(x) = 0 \\ a\alpha_1'(x)\varphi_1'(x) + a\alpha_2'(x)\varphi_2'(x) = d(x) \end{cases}}$$

La résolution de ce système permet de trouver α_1' et α_2' puis, à l'aide de deux calculs de primitives, de déterminer les solutions de l'équation complète.

6.3 Exemples

6.3.1 Résolution de l'équation : $(1-t)y'(t) - y(t) = t$

1. On commence par diviser l'équation par $(1-t)$, pour cela, on se place soit sur $]-\infty, 1[$, soit sur $]1, +\infty[$.
   Sur chacun de ces intervalles, l'équation devient :

$$y'(t) - \frac{1}{1-t}y(t) = \frac{t}{1-t} \quad (E)$$

2. On résout l'équation homogène associée à (E) sur chaque intervalle (séparément). On a

$$y'(t) - \frac{1}{1-t}y(t) = 0 \quad (EH)$$

   ✓ Sur $]-\infty, 1[$, les solutions de l'équation sont de la forme : $y : x \longmapsto \alpha \mathrm{e}^{-F(x)}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et F est une primitive de $t \longmapsto -\dfrac{1}{1-t}$ ainsi $F : x \longmapsto \ln(|1-t|)$ convient.
   Les solutions de (EH) sur $]-\infty, 1[$ sont :

$$y : x \longmapsto \frac{\alpha}{|1-x|} = \frac{\alpha}{(1-x)} \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

   ✓ Sur $]1, +\infty[$, les solutions de l'équation sont de la forme :

$$y : x \longmapsto \beta \mathrm{e}^{-F(x)}$$

   où $\beta \in \mathbb{R}$ et F est une primitive de $t \longmapsto -\dfrac{1}{1-t}$.
   Des calculs analogues au cas précédent montrent que, sur $]1, +\infty[$:

$$y : x \longmapsto \frac{\beta}{(1-x)} \qquad \text{avec } \beta \in \mathbb{R}$$

3. On recherche maintenant une solution particulière de l'équation sur chaque intervalle.
   ✓ Sur $]-\infty, 1[$, on utilise la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution particulière de la forme :

$$y_P : x \longmapsto \frac{c(x)}{1-x}$$

   où c est une fonction dérivable.
   En dérivant et insérant dans l'équation, on obtient :

$$y_P'(x) = \frac{c'(x)}{1-x} + \frac{c(x)}{(1-x)^2}$$
$$y_P'(x) - \frac{1}{(1-x)}y_P(x) = \frac{c'(x)}{1-x}$$

Ainsi y_P est solution de (E) ssi $\dfrac{c'(x)}{1-x} = \dfrac{x}{(1-x)}$.

La fonction $c : t \mapsto \dfrac{1}{2}x^2$ convient, ce qui donne une solution particulière pour (E) sur $]-\infty, 1[$:

$$y_P : x \longmapsto \frac{x^2}{2(1-x)}$$

✓ Sur $]1, +\infty[$, la même méthode (et le même calcul ici, mais ce n'est pas toujours le cas...) permet de démontrer que $y_P : t \longmapsto \dfrac{t^2}{2(1-t)}$ est une solution particulière de (E).

4. On obtient toutes les solutions de (E) sur chaque intervalle en sommant la solution générale de (EH) et la solution particulière trouvée :

$$\text{sur }]-\infty, 1[\; y : \begin{cases}]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \quad \longmapsto \dfrac{\frac{t^2}{2} + \alpha}{(1-t)} \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{sur }]1, +\infty[\; y : \begin{cases}]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \quad \longmapsto \dfrac{\frac{t^2}{2} + \beta}{(1-t)} \end{cases} \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{R}$$

5. **Si on le demande**, on peut s'intéresser aux problèmes de recollement :
Peut-on trouver une fonction f qui soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ tout en entier ?
Une telle fonction f existe si et seulement si les quatre points suivants sont vérifiés :
   (a) f restreinte à $]-\infty, 1[$ est solution de (E) sur $]-\infty, 1[$, et de même sur $]1, +\infty[$,
   (b) f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 1,
   (c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 1,
   (d) f vérifie (E) aussi en 1.

   (a) Si une telle fonction f existe, alors elle s'écrit :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\frac{t^2}{2} + \alpha}{(1-t)} & \text{si } t < 1 \\ f(1) & \text{si } t = 1 \\ \dfrac{\frac{t^2}{2} + \beta}{(1-t)} & \text{si } t > 1 \end{cases} \end{cases}$$

   où α, β, $f(1)$ sont des réels.

   (b) On étudie la limite en 1 de f (à gauche et à droite) :
   Si $t < 1$ $f(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2} + \alpha}{(1-t)} = \dfrac{t^2 - 2\alpha}{2(1-t)}$
   f admet une limite à gauche en 1 si et seulement si 1 et racine du numérateur, c'est à dire $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Dans ce cas, on a $\lim\limits_{t \to 1^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 1^-} -\dfrac{t+1}{2} = -1$.
   Si $t > 1$, le même raisonnement montre que f admet une limite à droite en 1 si et seulement si $\beta = \dfrac{1}{2}$ et dans ce cas, on a aussi $\lim\limits_{t \to 1^+} f(t) = -1$.

   <u>Conclusion :</u> Pour que f puisse être continue sur $\mathbb{R}$
   il faut $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \lim\limits_{t \to 1^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 1^+} f(t) = -1$.
   Ce qui revient à dire que f est la fonction $f : t \longmapsto -\dfrac{t+1}{2}$.

   On vérifie maintenant que cette fonction rempli les conditions énoncées ci-dessus :
   (c) elle est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ (ici, il n'y a rien à vérifier car f est un polynôme, dans le cas général, cela peut donner des conditions supplémentaires sur les constantes, on étudie les taux d'accroissements à gauche et à droite).
   (d) on sait qu'elle vérifie (E) sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, il reste à regarder en 1 : Prenons la valeur en 1 de $(1-t)f'(t) - f(t) = 0 - (-1) = 1$, et $t = 1$ donc en 1 on a bien $(1-t)f'(t) - f(t) = t$.

6.3.2 Résolution de l'équation : $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = \cos(2x)$

1. **On résout l'équation homogène :** (EH) $y'' - 6y' + 9y = 0$.
   Pour cela, on considère l'équation caractéristique associée à (EH) : $r^2 - 6r + 9 = 0 \iff (r-3)^2 = 0$
   Cette équation admet une racine double : $r = 3$, les solutions de (EH) s'écrivent donc :

$$y_H : x \longmapsto (ax+b)\mathrm{e}^{3x} \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

2. **On cherche une solution particulière de** (E).
   Comme le second membre est de la forme $x \mapsto \cos(2x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$, on utilise le principe de superposition pour chercher une solution particulière pour $(E_1) : y'' - 6y' + 9y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ et pour $(E_2) y'' - 6y' + 9y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$.

   Pour (E_1) **:** Comme $2\mathrm{i}$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme : $y_1 : x \mapsto \alpha\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.
   On calcule pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 2\mathrm{i}\alpha\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \\ y_1''(x) &= -4\alpha\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \\ \text{d'où } y_1''(x) - 6y_1'(x) + 9y_1(x) &= (-4\alpha - 12\mathrm{i}\alpha + 9\alpha)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \end{aligned}$$

   En identifiant, on obtient : $(5 - 12\mathrm{i})\alpha = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\alpha = \frac{1}{2}(\frac{5+12\mathrm{i}}{169})$

   Pour (E_2) **:** Comme $-2\mathrm{i}$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme : $y_2 : x \mapsto \beta\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$ avec $\beta \in \mathbb{C}$.
   On calcule pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= -2\mathrm{i}\beta\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} \\ y_2''(x) &= -4\beta\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} \\ &\text{d'où} \\ y_2''(x) - 6y_2'(x) + 9y_2(x) &= (-4\beta + 12\mathrm{i}\beta + 9\beta)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} \end{aligned}$$

   En identifiant, on obtient : $(5 + 12\mathrm{i})\beta = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\beta = \frac{1}{2}(\frac{5-12\mathrm{i}}{169})$

   On somme y_1 et y_2 pour obtenir une solution particulière de (E) :

$$y_P(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{1}{2}(\frac{5+12\mathrm{i}}{169})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \frac{1}{2}(\frac{5-12\mathrm{i}}{169})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$$

   En utilisant les formules d'Euler, on voit réapparaître des sinus et cosinus. La particulière est en fait une fonction à valeurs réelles ici, ce qui est normal étant donné que (E) est une équation réelle. On obtient :

$$y_P : x \longmapsto \frac{5}{169}\cos(2x) - \frac{12}{169}\sin(2x)$$

3. **On obtient toutes les solutions** de (E) en faisant la somme de la solution particulière trouvée et des solutions de (EH) :

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{3x} + \frac{5}{169}\cos(2x) - \frac{12}{169}\sin(2x) \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Chapitre 7 :

Sujets de devoirs

7.1 Devoir du 7 septembre 2010 - durée 1h30

Une feuille A4 recto manuscrite est le seul document autorisé. Photocopies interdites
Les calculatrices sont interdites.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans la note finale.
Barême indicatif (et modifiable) : **ex 1 :** 10 points env. / **ex 2 :** 6 points env. / **ex 3 :** 5 points env.

Exercice 1 ***[Algèbre linéaire]***

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
et on note $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A.

1. Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ donner $f(x, y, z, t)$.
2. Déterminer $\text{rg}(A)$, $\text{Ker}\,(f)$ et $\text{Im}\,(f)$.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. Sans calculs, pouvez-vous donner une valeur propre de A ?
5. Déterminer le polynôme caractéristique de A. Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
6. *Cette question ainsi que les suivantes sont indépendantes des questions précédentes.*
   Déterminer une base de $\text{Ker}\left(f^2\right)$ et une base de $\text{Ker}\left((f - id)^2\right)$.
   Montrer que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est égale à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
   on choisira les vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 de manière à ce que leurs coordonnées dans la base canonique soient uniquement des éléments de $\{-1, 0, 1\}$.
8. Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, donner la formule reliant A et T à l'aide de P et son inverse.
9. Calculer P^{-1}, *on détaillera la méthode employée.*

Exercice 2 ***[Fractions rationnelles]***

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant les cas. Avant de faire les calculs, on commencera par préciser, dans chaque cas, la forme de la décomposition.

1. Décomposition dans $\mathbb{R}$ de $F_1 = \dfrac{X + 5}{X^2 - 2X - 3}$.
2. Décomposition dans $\mathbb{C}$ de $F_2 = \dfrac{1}{X^3 - 1}$.

3. Décomposition dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ de $F_3 = \dfrac{X^5 - 1}{X^2 + 1}$.

Exercice 3 ***[Équations différentielles]***

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $y'(t) + \tan(t) y(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle : $y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$.

7.2 Devoir du 29 novembre 2011 - durée 1h30

Une feuille A4 recto manuscrite est le seul document autorisé. Photocopies interdites
Les calculatrices sont interdites.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans la note finale.

Exercice 1 ***[Environ 7 points]***

On considère la fraction rationnelle F suivante : $F = \dfrac{X^5 + 2\,X^3 - 5\,X^2 - 4\,X}{X^4 - X^3 - X + 1}$

1. Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ ainsi que dans $\mathbb{C}[X]$. On commencera par **donner la forme** de la décomposition dans chaque cas et on **détaillera les techniques employées** (il sera tenu compte de la rédaction).
2. Déterminer les primitives de la fonction associée à F, $f : x \mapsto \dfrac{x^5 + 2\,x^3 - 5\,x^2 - 4\,x}{x^4 - x^3 - x + 1}$ en précisant les intervalles de validité.

Exercice 2 ***[Environ 4 points]***

Soient $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\dfrac{1 + \mathrm{i}\tan(\alpha)}{1 - \mathrm{i}\tan(\alpha)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$, alors $\dfrac{\mathrm{i}(1-\lambda)}{1+\lambda} = \dfrac{\mathrm{Im}\,(\lambda)}{1 + \mathrm{Ré}\,(\lambda)}$.
3. Déterminer les solutions de l'équation (E) : $\left(\dfrac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z}\right)^n = \dfrac{1 + \mathrm{i}\tan(\alpha)}{1 - \mathrm{i}\tan(\alpha)}$.
   Montrer que toutes solutions de (E) sont des réels, on les exprimera à l'aide des fonctions sinus et cosinus.

Exercice 3 ***[Environ 7 points]***

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction linéaire suivante : $f_a : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto \big((1-a)x + (1+a)y + 2z, 2y, ax - 2y + t, 2y + 2az\big) \end{cases}$

1. Donner la matrice M_a de f_a relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (on choisit la même base au départ et à l'arrivée).
2. Calculer le déterminant de M_a.
3. Préciser quelles sont les valeurs de a pour lesquelles f_a n'est pas injective.
4. Déterminer, suivant la valeur de a, l'image et le noyau de f_a, on donnera dans chaque cas une base et la dimension.

On considère la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

5. Donner a telle que $M = M_a$, en déduire une des valeurs propres de M.
6. La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une matrice P inversible et D diagonale semblable à M, ainsi que la relation liant M, D et P ainsi que son inverse. On ne demande pas de calculer P^{-1}.

Exercice 4 ***[Environ 2 points]***

Déterminer toutes les solutions à valeurs réelles de l'équation

$$y'' - 5y' + 6y = 2x\mathrm{e}^{2x}$$

7.3 Devoir du 4 septembre 2012 - durée 1h30

Une feuille A4 recto manuscrite est le seul document autorisé. Photocopies interdites
Les calculatrices sont interdites.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans la note finale.

Exercice 1 *[$\simeq$ 6 points]*

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de f ainsi qu'une base de $\operatorname{Ker}(f)$.
2. f est-elle injective ? surjective ?
3. Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ est le plan d'équation $x + y - z = 0$ et donner une base de $\operatorname{Im}(f)$.
4. Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que ses valeurs propres.
5. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 *[$\simeq$ 4 points]*

L'ojectif de l'exercice est de trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$\operatorname{sh}(x)y'(x) - \frac{y(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

1. Expliquer pourquoi on doit séparer l'étude de $\mathbb{R}_+^*$ et de $\mathbb{R}_-^*$.
2. On effectue l'étude sur $\mathbb{R}_+^*$:
   (a) Après avoir vérifié que la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ est solution de l'équation homogène, donner la forme des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire les solutions de l'équation complète sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra utiliser la méthode de la variation de la constante).
3. Donner les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$.
4. Étudier la possibilité de raccord des solutions afin de trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ (on rappelle que les solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 doivent être continues et dérivables sur leur intervalle de définition).

Exercice 3 *[$\simeq$ 3 points]*

Calculer $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{dt}{t\ln(t)\left(1+\ln^5(t)\right)}$, on pourra effectuer le changement de variable : $u = \ln^5(t)$.

Exercice 4 *[$\simeq$ 7 points]*

Le but de l'exercice est de donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ainsi que celles des sinus correspondants.

Remarque. *Les questions 2, 3, 4 et 5 peuvent être traitées même si on n'a pas su répondre à la question 1. par contre, celle-ci est indispensable pour la question 6.*

1. On pose $P(z) = z^5 - 1$. Donner les 5 racines de P et les représenter (approximativement) sur le cercle unité.
2. Factoriser P sous la forme $P(z) = (z-1)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 4 et vérifier que $Q(0) \neq 0$.
3. On pose $u = z + \dfrac{1}{z}$, montrer qu'on peut écrire $Q(z) = z^2 R(u)$ où R est un polynôme de degré 2.
4. Déterminer les racines de R, en déduire une factorisation de Q en deux polynômes de degré 2 à coefficients réels (en la variable z).
5. Terminer la factorisation de Q.
6. En déduire les relations cherchées.

7.4 Devoir du 10 décembre 2013 - durée 1h30

Une feuille A4 recto manuscrite, le formulaire sur les fonctions usuelles et le formulaire de trigonométrie sont les seuls documents autorisés.
Les calculatrices sont interdites.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans la note finale.

Exercice 1 ***[Equation différentielle $\simeq$ 4 points]***

On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \qquad xy'(x) + y(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

1. Effectuer la résolution de (E) sur chaque intervalle que l'on précisera.
2. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ entier (on étudiera donc les problèmes de raccord).
   Au besoin, on pourra utiliser le développement limité suivant en 0 : $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

Exercice 2 ***[Algèbre linéaire $\simeq$ 6 points]***

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on note $\mathcal{B}$ la base canonique de E. On considère A la matrice suivante et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A :

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{f}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. (a) Calculer A^2, en déduire l'existence d'un scalaire α tel que $f \circ f = \alpha f$.
   (b) Que peut-on dire du polynôme $P = X^2 - \alpha X$ pour la matrice A ? que peut-on en déduire pour les valeurs propre possible de A ?
3. (a) Déterminer $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(f)$, on donnera pour chacun une base et la dimension.
   (b) Que peut-on en déduire à propos des valeurs propres de A ?
4. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
5. A est-elle diagonalisable, si oui, déterminer une matrice diagonale, D, une base de vecteurs propres et donner la relation qui lie A et D. On ne demande pas le calcul de l'inverse de la matrice de passage.

Exercice 3 ***[Polynômes - Complexes $\simeq$ 7 points]***

La question 1. est indépendante des autres. Les questions 2. et 3. **ne sont pas** indépendantes même si on peut traiter une grande partie de la question 3. sans avoir réussi la 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\mathrm{i}z^2 - (1+\mathrm{i})z + 2\mathrm{i} - 1 = 0$
2. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$.
   (a) Déterminer l'écriture exponentielle de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on pensera à l'angle moitié et à discuter selon la valeur de θ.
   (b) Déterminer en fonction de la valeur de θ, le nombre complexe z tel que $\dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On justifiera le fait que $z \in \mathbb{R}$ en donnant une écriture simplifiée au maximum de la solution trouvée.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P_n = (X^2+1)^n - (X+\mathrm{i})^{2n}$.
   (a) Quel est le degré de P_n ? que peut-on en déduire sur le nombre de ses racines ? seront-elles conjuguées deux à deux ?
   (b) Justifier le fait que P_n admet $-\mathrm{i}$ comme racine multiple et déterminer sa multiplicité.
   (c) Déterminer la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ de P_n en produit de polynômes irréductibles.
   On utilisera la question 1. (b) *pour donner une écriture simple des racines de* P_n *autres que* $-i$.

Exercice 4 ***[Fractions Rationnelles - Intégration $\simeq$ 3 points]***

On considère la fraction rationnelle $F = \dfrac{5X^3 + X^2 + 16X + 4}{X^4 + 4X^2}$

1. Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$. On donnera d'abord la forme de la décomposition.
2. Déterminer les primitives de la fonction rationnelle associée : $f : x \mapsto \dfrac{5x^3 + x^2 + 16x + 4}{x^4 + 4x^2}$. On précisera sur quels intervalles se placer.

7.5 Devoir du 9 septembre 2014 - durée 1h30

Une feuille A4 recto manuscrite, le formulaire sur les fonctions usuelles et le formulaire de trigonométrie sont les seuls documents autorisés.
Les calculatrices sont interdites.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans la note finale.

Exercice 1 ***[Fractions Rationnelles - Complexes - Intégration $\simeq$ 5 points]***

On considère la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{X(X+1)^2(X^2+X+1)}$$

1. Donner la forme de la décomposition de F dans $\mathbb{R}(X)$.
2. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer $(j+1)^2$ et $\dfrac{1}{j^2}$ en fonction de j. Puis, déterminer la partie de la décomposition relative à X^2+X+1.
3. Calculer les autres coefficients de la décomposition.
4. Donner les primitives de la fonction associée à la fraction rationnelle F. On précisera quels sont les intervalles de validité.

Exercice 2 ***[Algèbre linéaire $\simeq$ 6 points]***

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de A.

1. Calculer le déterminant de A.
2. f est-elle bijective ? déterminer $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ (on donnera pour chacun une base et la dimension).
3. Calculer le polynôme caractéristique de A.
4. Déterminer, suivant les valeurs du réel a, si la matrice est diagonalisable ou non dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$. On précisera les valeurs propres dans chaque cas.
5. Dans cette question, on choisit $a = 6$, diagonaliser la matrice : on donnera une matrice P inversible et une matrice D ainsi que le lien reliant A, P, P^{-1} et D, on ne demande pas de calculer P^{-1}.

Exercice 3 ***[Nombres complexes - Polynômes $\simeq$ 7 points]***

Le but de l'exercice est de donner les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ ainsi que celles des sinus correspondants.

Remarque. *Les questions 2, 3, 4 et 5 peuvent être traitées même si on n'a pas su répondre à la question 1. par contre, celle-ci est indispensable pour la question 6.*

1. On pose $P(z) = z^5 - 1$. Donner les 5 racines de P et les représenter (approximativement) sur le cercle unité.
2. Factoriser P sous la forme $P(z) = (z-1)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 4 et vérifier que $Q(0) \neq 0$.
3. On pose $u = z + \dfrac{1}{z}$, montrer qu'on peut écrire $Q(z) = z^2 R(u)$ où R est un polynôme de degré 2.
4. Déterminer les racines de R, en déduire une factorisation de Q en deux polynômes de degré 2 à coefficients réels (en la variable z).
5. Terminer la factorisation de Q.
6. En déduire les relations cherchées.

Exercice 4 ***[Intégration - Equations différentielles $\simeq$ 6 points]***

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad x^2 y'(x) + (x^2 \tan(x) + 2x)y(x) = 2\tan(x)$$

1. Déterminer les primitives des fonctions : $f : x \mapsto \tan(x)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.
2. Déterminer les solutions de (E) sur les intervalles $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $J = \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$.
3. Étudier les possibilités de raccord en 0. (On rappelle que : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$)

7.6 Devoir du 9 septembre 2015 - durée 1h30

Une feuille A4 recto manuscrite est le seul document autorisé.
Les calculatrices sont interdites.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans la note finale.

Exercice 1 ***[Fractions Rationnelles]***

$\simeq$ 6 points Considérons la fraction rationnelle F donnée par

$$F = \frac{X^5}{X^4 + X^2 - 2}$$

1. Donner la forme de la décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la partie entière Q de cette décomposition, on notera $G = F - Q$.
3. Calculer $G(-X)$, (il s'agit de G « appliqué » en $-X$), en déduire des relations entre les coefficients de la décomposition de G dans $\mathbb{C}$.
4. Déterminer la décomposition en éléments simples de G puis de F dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.
5. Expliquer pourquoi le calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} xG(x)$ permet de conforter les résultats obtenus pour la décomposition dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 ***[Nombres complexes - Intégration]***

$\simeq$ 4 points

1. Déterminer trois réels α, β, γ, tels que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^4(\theta) = \alpha\cos(4\theta) + \beta\cos(2\theta) + \gamma$
2. En déduire la valeur de l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(\theta)d\theta$.
3. A l'aide d'un changement de variable que l'on explicitera avec soin, calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^3}dx$

Exercice 3 ***[Algèbre linéaire]***

$\simeq$ 6 points On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$.
2. f est-elle injective ? surjective ?
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un plan dont on déterminera une équation et en donner une base.
4. Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que ses valeurs propres.
5. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 ***[Equation différentielle]***

4 points On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad \cos(x)y'(x) + \sin(x)y(x) = 1 + x$$

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Déterminer une solution particulière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en utilisant la méthode de variation de la constante.
   Indication : On sera conduit à déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1+x}{\cos^2(x)}$ à l'aide d'un calcul de primitives par parties.
3. En déduire la solution générale de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Chapitre 8 :

Quelques Corrigés

8.1 Correction du devoir du 7 septembre 2010

Exercice 1

1. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, le calcul matriciel donne : $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+2z-2t \\ z-t \\ x-y+z \\ x-y+z \end{pmatrix}$
   ainsi $f(x, y, z, t) = (x-y+2z-2t, z-t, x-y+z, x-y+z)$.
2. On calcule le rang de A :
$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (C_2 = -C_1 \text{ donc on peut l'enlever, } C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \qquad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \text{ et la famille obtenue est libre}) \end{aligned}$$
   Pour déterminer $\operatorname{Im}(f)$:
   On a calculé le rang de f, c'est-à-dire la dimension de $\operatorname{Im}(f)$, par ailleurs, si on note (v_1, v_2, v_3, v_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(v_1), \ldots, f(v_4))$ et $f(v_i)$ est représenté par la $i-$ème colonne de A.
   Comme $C_1 = -C_2$, on a $f(v_1) = -f(v_2)$ et donc
$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}(f(v_1), f(v_3), f(v_4)) = \operatorname{Vect}((1, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 1), (-2, -1, 0, 0)) \\ &= \operatorname{Vect}((1, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 1), (2, 1, 0, 0)) \end{aligned}$$
   cette famille génératrice comporte 3 éléments et $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension 3, donc c'est une base de $\operatorname{Im}(f)$.
   Pour déterminer $\operatorname{Ker}(f)$:
   D'après le théorème du rang, on a $\dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 4$, donc $\dim \operatorname{Ker}(f) = 1$.
   De plus on a $f(v_1) = -f(v_2) \iff f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) = f(1, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$
   ainsi $(1, 1, 0, 0) \in \operatorname{Ker}(f)$, et comme celui-ci est de dimension 1, on a $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((1, 1, 0, 0))$.
3. Le noyau de f n'est pas réduit à $(0, 0, 0, 0)$ donc f n'est pas injective.
   De plus, d'après le théorème du rang, si g est un endomorphisme de E, ev de dimension finie, alors
$$g \text{ injective} \iff g \text{ surjective} \iff g \text{ bijective}$$
   Ici f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ et comme f n'est pas injective, elle n'est pas non plus surjective, ni bijective.
4. On sait que $\operatorname{Ker}(f) \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$, ainsi, il existe $v \neq 0_E$ tel que $f(v) = (0, 0, 0, 0)$ ceci signigie que 0 est une valeur propre de f.
5. Le calcul donne $P_A = X^2(X-1)^2$.
   0 et 1 sont donc les seules valeurs propres de f (et de A !) et elles sont doubles.
   De plus on sait que le sous-espace propre associé à 0 est $E_0 = \operatorname{Ker}(f)$, donc $\dim(E_0) = 1 \neq 2$, ainsi f n'est pas diagonalisable.
6. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
   et on détermine son noyau.

La matrice A^2 est de rang 2 ($C_1 = -C_2 = C_3$ et (C_1, C_4) forme une famille libre), ainsi $\dim \text{Ker}\left(f^2\right) = 4 - 2 = 2$, il suffit de trouver deux vecteurs indépendants de $\text{Ker}\left(f^2\right)$, on utilise pour cela les relations de dépendance entre les colonnes de la matrice :
$C_1 + C_2 = 0 \iff f^2(1,1,0,0) = (0,0,0,0)$
$C_1 - C_3 = 0 \iff f^2(1,0,-1,0) = (0,0,0,0)$
ainsi $\text{Vect}((1,1,0,0),(1,0,-1,0)) \subset \text{Ker}\left(f^2\right)$ et l'égalité des dimensions permet de conclure à l'égalité.
Donc $\Big((1,1,0,0),(1,0,-1,0)\Big)$ est une base de $\text{Ker}\left(f^2\right)$.

On peut procéder de manière analogue pour $\text{Ker}\left((f-id)^2\right)$, mais ici, je vais rédiger un peu différemment (avec la résolution d'un système) pour que vous puissiez profiter d'un autre point de vue !

On a $(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

alors $(x,y,z,t) \in \text{Ker}\left((f-id)^2\right) \iff (A - I_4)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} y - 3z + 3t = 0 \\ y - 2z + 2t = 0 \\ z - t = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 = L_2 - 2L_3 \\ z - t = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs $(1,0,0,0), (0,0,1,1)$ ne sont pas proportionnels donc ils sont indépendants et de plus l'égalité précédente prouve qu'ils engendrent $\text{Ker}\left((f-id)^2\right)$.
Ainsi $\text{Ker}\left((f-id)^2\right) = \text{Vect}((1,0,0,0),(0,0,1,1))$.

Montrons maintenant que ces deux espaces sont supplémentaires. On sait déjà qu'ils sont tous les deux de dimension 2, ainsi $\dim(\text{Ker}\left(f^2\right)) + \dim(\text{Ker}\left((f-id)^2\right)) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$.
Pour montrer qu'ils sont supplémentaires, il suffit alors de vérifier que $\text{Ker}\left(f^2\right) + \text{Ker}\left((f-id)^2\right) = \mathbb{R}^4$ (ces deux propriétés entrainent alors que $\text{Ker}\left(f^2\right) \cap \text{Ker}\left((f-id)^2\right) = \left\{(0,0,0,0)\right\}$).
On peut construire une famille génératrice de $\text{Ker}\left(f^2\right) + \text{Ker}\left((f-id)^2\right)$ en rassemblant les vecteurs d'une famille génératrice de chaque espace. Ainsi $\text{Ker}\left(f^2\right) + \text{Ker}\left((f-id)^2\right) = \text{Vect}((1,1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,0),(0,0,1,1))$.
Pour montrer que cet ev est $\mathbb{R}^4$ tout entier, il suffit alors de calculer le rang de la famille, ou de vérifier que son déterminant est non nul ou encore de montrer qu'elle est libre...
La liberté est facile à rédiger :
soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha(1,1,0,0) + \beta(1,0,-1,0) + \gamma(1,0,0,0) + \delta(0,0,1,1) = (0,0,0,0)$
ceci est équivalent à $(\alpha + \beta + \gamma, \alpha, -\beta + \delta, \delta) = (0,0,0,0) \iff \Big(\alpha = 0 \; et \; \delta = 0 \; et \; \beta = \delta = 0 \; et \; \gamma = -\alpha - \beta = 0\Big)$
Ainsi la famille est libre, et on a $\text{Vect}((1,1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,0),(0,0,1,1)) = \mathbb{R}^4$, donc les espaces sont bien supplémentaires.

7. Le travail effectué précédemment va nous servir pour construire la base $\mathcal{B}$.
Choisissons $e_1 = (1,1,0,0)$, alors $f(e_1) = (0,0,0,0)$ car $e_1 \in \text{Ker}\,(f)$.
Observons maintenant ce qu'il se passe avec $(1,0,-1,0)$, l'autre vecteur de la base de $\text{Ker}\left(f^2\right)$, en calculant avec la matrice A, on a $f((1,0,-1,0)) = (-1,-1,0,0)$, ainsi en posant $e_2 = (-1,0,1,0)$, on obtient $f(e_2) = e_1$.
De manière analogue, choisissons $e_3 \in \text{Ker}\,(f - id)$, $e_3 = (0,0,1,1)$ convient, on a alors $f(e_3) = e_3$.
En calculant $f(1,0,0,0) = (1,0,1,1) = (1,0,0,0) + e_3$, on peut alors poser $e_4 = (1,0,0,0)$ et on a bien $f(e_4) = e_4$.
Ainsi $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_1$, $f(e_3) = e_3$ et $f(e_4) = e_3 + e_4$.
La matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$.
8. La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ représente les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes, ainsi, on a :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Par ailleurs les formules de changement de base permettent d'écrire la relation : $A = PTP^{-1}$.

9. Pour calculer l'inverse de P, il y a de nombreuses méthodes, ici, P comporte beaucoup de 0, la résolution du système est très rapide : soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$PX = Y \iff \begin{cases} x - y + t = a \\ x = b \\ y + z = c \\ z = d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = b & L_1 \leftarrow L_2 \\ -y + t = a - b & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y = c - d & L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ z = d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = b \\ y = c - d & L_2 \leftarrow L_3 \\ z = d \\ t = a - b + c - d & L_4 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$\iff X = P^{-1}Y \quad \text{avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. On a $X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$, ce qui permet d'obtenir la forme de la décomposition de F_1 dans $\mathbb{R}$:

$$F_1 = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-3}$$

On détermine ensuite a et b :
posons $G_1 = (X+1) \times F_1 = \dfrac{X+5}{X-3} = a + b\dfrac{X+1}{X-3}$, alors $a = G_1(-1) = -1$
de même posons $H_1 = (X-3) \times F_1 = \dfrac{X+5}{X+1} = a\dfrac{X-3}{X+1} + b$, alors $b = H_1(3) = 2$.
D'où la décomposition : $F_1 = \dfrac{-1}{X+1} + \dfrac{2}{X-3}$.

2. Dans $\mathbb{C}$, $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)(X-1)(X-j)(X-j^2)$ avec $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
Les racines de $X^3 - 1$ sont les racines troisième de l'unité, et on a $j^2 = \overline{j}$.
Ainsi la forme de la décomposition est :

$$F_2 = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2}$$

Pour déterminer a : on pose $G_2 = (X-1)F_2 = \dfrac{1}{X^2+X+1}$ car $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$,
alors $a = G_2(1) = \dfrac{1}{3}$.
On peut procéder de la même façon pour déterminer b et c, mais il est plus économique de commencer par observer que F_2 est une fraction à coéfficients réels, ainsi, en écrivant $F_2 = \overline{F_2}$ dans la décomposition, on obtient :

$$\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2} = \frac{\overline{a}}{X-1} + \frac{\overline{b}}{X-\overline{j}} + \frac{\overline{c}}{X-\overline{j^2}}$$

et en identifiant, on obtient $a \in \mathbb{R}$ (ce qu'on savait déjà) et $\overline{b} = c$.
Il reste donc un unique coefficient à calculer.
Comme il s'agit de pôles simples, on peut utiliser le lien avec la dérivée du dénominateur :
en posant $P = X^3 - 1 = (X-j)Q$, on a $b = \dfrac{1}{Q(j)} = \dfrac{1}{P'(j)}$
Ici $P' = 3X^2$ d'où $b = \dfrac{1}{3j^2} = \dfrac{1}{3}j$ (en effet $j^3 = 1$ donc $\dfrac{1}{j^2} = j$).
D'où $c = \overline{b} = \dfrac{1}{3}j^2$. Au final la décomposition dans $\mathbb{C}$ est

$$F_2 = \frac{1/3}{X-1} + \frac{1/3j}{X-j} + \frac{1/3j^2}{X-j^2}$$

3. Le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, il y aura donc une partie entière (Q est un polynôme de degré 3), ce qui donne les formes suivantes de décomposition :

$$F_3 = Q + \frac{aX+b}{X^2+1} \quad \text{dans } \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad F_3 = Q + \frac{\alpha}{X-\mathrm{i}} + \frac{\beta}{X+\mathrm{i}} \quad \text{dans } \mathbb{C}$$

On obtient Q en faisant la division euclidienne de X^5-1 par X^2+1 : $X^5-1=(X^3-X)(X^2+1)+X-1$
ainsi $Q=X^3-X$ et $F_3=X^3-X+\dfrac{X-1}{X^2+1}$ ce qui donne immédiatement la décomposition dans $\mathbb{R}$ avec $a=1$ et $b=-1$.

Pour terminer la décomposition dans $\mathbb{C}$, on peut utiliser le fait que F_3 est une fraction à coefficients réels, ainsi $F_3=\overline{F_3}$ et en l'écrivant dans la décomposition, on obtient $\overline{\alpha}=\beta$.
Pour trouver α, il suffit de multiplier $\dfrac{X-1}{X^2+1}$ par $X-\mathrm{i}$, et de prendre la valeur en i de la fraction obtenue.
Ainsi $\alpha=\dfrac{\mathrm{i}-1}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{(\mathrm{i}-1)\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$. D'où $\beta=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$.
On a donc la décomposition dans $\mathbb{C}$: $F_3=X^3-X+\dfrac{\frac{1+\mathrm{i}}{2}}{X-\mathrm{i}}+\dfrac{\frac{1-\mathrm{i}}{2}}{X+\mathrm{i}}$

Exercice 3

1. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On commence par résoudre l'équation homogène sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$:

$$y'(t)+\tan(t)y(t)=0$$

Les solutions de cette équations sont les fonctions de la forme : $y:t\mapsto C\mathrm{e}^{-F(t)}$ où F désigne une primitive de la fonction tan et $C\in\mathbb{R}$.
Calculons une primitive de la fonction tan : pour $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}F(t)&=\int\tan(t)dt=\int\frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt \quad \text{(de la forme } -u'/u\text{, s'intègre en } -\ln|u|)\\ &=-\ln|\cos(t)|=-\ln(\cos(t)) \quad \left(\text{car } \cos(t)>0 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\end{aligned}$$

Ainsi les solutions de l'équation homogène sont toutes les fonctions de la forme $y:t\mapsto C\mathrm{e}^{\ln(\cos(t))}=C\cos(t)$ avec $C\in\mathbb{R}$.

On résout maintenant l'équation complète, pour cela, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière de l'équation de la forme $y_0:t\mapsto C(t)\cos(y)$
Pour une telle fonction y_0, et pour $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on calcule :

$$y_0'(t)=C'(t)\cos(t)+C(t)(-\sin(t))=C'(t)\cos(t)-\sin(t)C(t)$$
d'ou
$$y_0'(t)+\tan(t)y_0(t)=C'(t)\cos(t)-\sin(t)C(t)+\tan(t)\cos(t)C(t)=C'(t)\cos(t)$$

Ainsi y_0 est une solution de l'équation si et seulement si pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $C'(t)\cos(t)=\dfrac{1}{\cos(t)}\iff C'(t)=\dfrac{1}{\cos^2(t)}$
$1/\cos^2$ étant la dérivée de la fonction tangente, on obtient, en intégrant : $C:t\mapsto\tan(t)+\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$
Ainsi $y_0:t\mapsto\tan(t)\cos(t)=\sin(t)$ est une solution particulière de l'équation.
On obtient la solution générale de l'équation en ajoutant cette solution particulière à la solution générale de l'équation homogène, ce qui donne l'ensemble de toutes les solutions de l'équation :

$$\mathcal{S}=\left\{y:t\longmapsto C\cos(t)+\sin(t)\quad\middle|C\in\mathbb{R}\right\}$$

2. Ici, il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Pour résoudre l'équation homogène (EH) : $y''+y'+y=0$
on s'intéresse aux racines de l'équation caractéristique $r^2+r+1=0$.
Les racines sont $j=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}$.
Les solutions réelles de (EH) s'écrivent donc :

$$y:t\longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\quad \text{avec } (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

On recherche maintenant une solution particulière de l'équation complète, notée (E), pour cela, on utilise le principe de superposition, on commence par chercher une solution particulière de (E_1) : $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ puis de (E_2) : $y''+y'+y=x^2$, et on ajoute les deux.
Pour (E_1) **:** Il suffit de chercher une solution particulière de la forme $y_1:x\mapsto c\mathrm{e}^x$ car 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique.
Pour une telle fonction y_1 et pour $x\in\mathbb{R}$, on a $y_1''(x)+y_1'(x)+y_1(x)=3c\mathrm{e}^x$, ainsi $c=\dfrac{1}{3}$ convient.
Ainsi $y_1:x\mapsto\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E_1).
Pour (E_2) **:** Cette fois, on cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 2, car la constante devant y n'est pas nulle,
$y_2:x\mapsto\alpha+\beta x+\gamma x^2$.

Pour une telle fonction y_2 et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $y_2''(x) + y_2'(x) + y_2(x) = 2\gamma + \beta + \alpha + (\beta + 2\gamma)x + \gamma x^2$, en identifiant terme à terme, y_2 est solution particulière de E_2

$$\iff \left\{ \begin{aligned} \gamma &= 1 \\ \beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \end{aligned} \right. \iff \big(\alpha = 0,\ \beta = -2,\ \gamma = 1\big)$$

Ainsi $y_2 : x \mapsto x^2 - 2x$ est une solution particulière de (E_2).

Au final, la solution générale de l'équation complète (E), s'écrit :

$$y : t \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^x + x^2 - 2x \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

8.2 Eléments de correction du devoir du 29 novembre 2011

Exercice 1

1. $F = X + 1 + \dfrac{2X+2}{X^2+X+1} + \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{2}{(X-1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$

   $F = X + 1 + \dfrac{1 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}}{X - j} + \dfrac{1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}}{X - j^2} + \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{2}{(X-1)^2}$ dans $\mathbb{C}(X)$

2. On se place sur $]-\infty, 1[$ ou sur $]1, +\infty[$ et on a :

$$\int F(t)dt = \frac{1}{2}t^2 + t + \ln|t-1| + \frac{2}{t-1} + \int \frac{2t+2}{t^2+t+1}dt$$

   De plus $\displaystyle\int \frac{2t+2}{t^2+t+1}dt = \int \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt + \int \frac{1}{t^2+t+1}dt = \ln(t^2+t+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$ avec C une constante pouvant dépendre de l'intervalle où on se place.

Exercice 2

1. Il suffit de multiplier la fraction en haut et en bas par $\cos(\alpha)$ et on obtient : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$
2. On multiplie en haut et en bas par la quantité conjuguée : $1+\bar{\lambda}$ et on développe en utilisant $\lambda + \bar{\lambda} = 2\mathrm{R\acute{e}}\,(\lambda)$, $\lambda - \bar{\lambda} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}\,(\lambda)$ et $\lambda\bar{\lambda} = 1$.
3. On pose $u = \dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$, et on commence par résoudre $u^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$, ce qui donne (racines n-ièmes d'un complexe) :

$$u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\alpha+2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

   On exprime z en fonction de u : $z = \dfrac{\mathrm{i}(1-u)}{1+u}$
   comme u est un complexe de module 1, d'après la question 2, on obtient toutes les solutions :

$$z = \frac{\sin\left(\frac{2\alpha+2k\pi}{n}\right)}{1 + \cos\left(\frac{2\alpha+2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Exercice 3

1. $M_a = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ a & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2a & 0 \end{pmatrix}$
2. $\det M_a = -4a(1-a)$
3. Ce sont les valeurs d'annulation du déterminant : $a = 0$ et $a = 1$.
4. Si $a \neq 0, 1$ alors f est bijective donc son noyau est réduit à $\{(0,0,0,0)\}$ et son image est $\mathbb{R}^4$.
   Si $a = 0$, alors M_0 est de rang 3 avec $2C_1 - C_3 = 0$, ainsi le noyau est de dimension 1, on a $\mathrm{Ker}\,(f_0) = \mathrm{Vect}((2,0,-1,0))$.La lecture de la matrice permet d'avoir : $\mathrm{Im}(f_0) = \mathrm{Vect}((1,0,0,0),(1,2,-2,2),(0,0,1,0))$.
   Si $a = 1$, alors M_1 est de rang 3 avec $C_1 - C_4 = 0$, ainsi le noyau est de dimension 1, on a $\mathrm{Ker}\,(f_1) = \mathrm{Vect}((1,0,0,-1))$.La lecture de la matrice permet d'avoir : $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}((0,0,1,0),(1,1,-1,1),(1,0,0,1))$.
5. C'est M_1, on en déduit que 0 est valeur propre (f_1 n'est pas injective) et que $(1,0,0,-1)$ est un vecteur propre associé.
6. On trouve que M_1 admet trois valeurs propres : 2 qui est une valeur propre double ainsi que 0 et -2 (simples). Il suffit de déterminer E_2 pour savoir si M_1 est diagonalisable, on trouve que $\dim(E_2) = 2$, M_1 est donc diagonalisable.
   On obtient $M_1 = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Les solutions sont : $y : x \mapsto \alpha e^{3x} + \beta e^{2x} + \left(-x^2 - 2x - 2\right) e^{2x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

8.3 Correction du devoir du 10 décembre 2013

Exercice 1 ***[Equation différentielle]***

On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \qquad xy'(x) + y(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

1. Pour résoudre l'équation, on doit se placer sur un des deux intervalles suivants : $I_1 = \mathbb{R}_-^*$, $I_2 = \mathbb{R}_+^*$.
Ains l'équation sur chacun de ces intervalles s'écrit sous forme résolue :

$$(E) \qquad y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Pour la suite de la résolution, on note I l'intervalle sur lequel on effectue la résolution, on a donc $I = I_1$ ou $I = I_2$. On ne séparera les calculs que si nécessaire.
On resout l'équation homogène sur I.

$$(EH) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0$$

Les solutions sur I sont de la forme $y : x \mapsto Ce^{-F(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$ et F est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Ainsi $Fx \mapsto \ln|x|$ convient et on obtient $y : x \mapsto \frac{C}{|x|} = \frac{D}{x}$ en considérant la constant $D = -C$ lorsque $I = I_1$ ($-C$ parcourt $\mathbb{R}$ entier).
Conclusion : Les solutions de l'équation homogène sur I sont les fonctions de la forme : $y : x \mapsto \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. (la constante pouvant changer selon l'intervalle)
On cherche une solution particulière de (E) sur I.
On utilise la méthode de la variation de la constante, en considérant la fonction $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ et en l'insérant dans l'équation :
Soit $x \in I$,

$$\begin{aligned} xy'(x) + y(x) = \frac{x^2}{x^2+1} &\iff C'(x) = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1} \\ &\iff C(x) = x - \arctan(x) + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Comme on cherche une solution particulière, on peut prendre $k = 0$, ainsi la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{\arctan(x)}{x}$ est une solution particulière de (E) sur I.
On en déduit la solution générale de (E) sur chaque intervalle :
Sur $\mathbb{R}_-^*$ $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + 1 - \frac{\arctan(x)}{x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
Sur $\mathbb{R}_+^*$ $y : x \mapsto \frac{\beta}{x} + 1 - \frac{\arctan(x)}{x}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$

2. En utilisant le développement limité de $\arctan(x)$ en 0 donné dans l'énoncé,
on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) = 1$
On a donc $\lim\limits_{x \to 0} 1 - \frac{\arctan(x)}{x} = 0$.
Ainsi une fonction de la forme $y \mapsto \frac{\lambda}{x} + 1 - \frac{\arctan(x)}{x}$ possède une limite finie en 0 si et seulement si $\lambda = 0$.
On en déduit que la seule fonction qui puisse être solution de (E) sur $\mathbb{R}$ s'écrira :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 - \frac{\arctan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

D'après le raisonnement ci-dessus, f est continue sur $\mathbb{R}$, de plus, elle vérifie l'équation (E) sur I_1 et I_2.
On doit encore vérifier que f est dérivable en 0 et qu'elle vérifie (E) en 0, pour répondre à la question posée.
En utilisant à nouveau le développement limité de $\arctan(x)$ en 0, on obtient
$f(x) = \frac{x - \arctan(x)}{x} = \frac{x - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = \frac{x^2}{3} + o(x^2)$
Ainsi f admet un DL à l'ordre 2 en 0, donc elle possède un DL à l'ordre 1 et est dérivable en 0 (on peut aussi étudier la limite du taux d'accroissement...)
Enfin en remplaçant x par 0 dans (E), on obtient $y(0) = 0$ ce qui est cohérent avec la valeur de $f(0)$.

Au final, on a bien justifié que f est la seule fonction solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 ***[Algèbre linéaire]***

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on note $\mathcal{B}$ la base canonique de E.
On considère A la matrice suivante et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A :

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{f}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

   la matrice de $f(x, y, z)$ dans la base canonique est donnée par $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ x + 3y - 3z \\ x - 2y + 2z \end{pmatrix}$.

   D'où, pour $f(x, y, z) = (5x, x + 3y - 3z, x - 2y + 2z)$.
2. (a) On obtient $A^2 = 5A$, ainsi en revenant aux endomorphismes associés, $f \circ f = 5f$.

   (b) $A^2 - 5A = 0$, ainsi le polynôme $P = X^2 - \alpha X$ est un polynôme annulateur de la matrice A.
   Or si P est un polynôme annulateur de A, les valeurs propres de A, se trouvent parmi les racines de P, on peut donc en déduire que les seules valeurs propres possibles pour A, sont 0 et 5.
3. (a) La matrice A est de rang 2 car les deux premières colonnes sont indépendantes et si on note C_1, C_2, C_3, les colonnes de A, il est immédiat de voir que $C_2 = -C_3$ c'est-à-dire $C_2 + C_3 = 0$.
   Le rang de la matrice est égal à la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$, de plus $\mathrm{Im}\,(f)$ est engendré par les vecteurs associés aux colonnes de A, ainsi $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}((5, 1, 1), (0, 3, -2), (0, -3, 2)) = \mathrm{Vect}((5, 1, 1), (0, 3, -2))$.
   De plus $\big((5, 1, 1), (0, 3, -2)\big)$ est libre et possède 2 éléments, c'est donc une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
   Par ailleurs, le théorème du rang permet d'affirmer que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 3$,
   ainsi $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$.
   De plus :

   $$C_2 + C_3 = 0 \iff A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff (0, 1, 1) \in \mathrm{Ker}\,(f)$$

   On a ainsi, un élément de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et comme $\mathrm{Ker}\,(f)$ est de dimension 1, on en déduit que $\big((0, 1, 1)\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}((0, 1, 1))$.

   (b) $\mathrm{Ker}\,(f)$ n'est pas réduit à 0, ainsi 0 est une valeur propre de f et donc également de A.
4. En développant par rapport à la première ligne puis en ajoutant les deux colonnes et en factorisant, on obtient $P_A = (5 - X) \begin{vmatrix} 3 - X & -3 \\ -2 & 2 - X \end{vmatrix} = -X(5 - X)^2$
5. A possède deux valeurs propres : 0 est valeur propre simple et 5 est valeur propre double, ainsi A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_5) = 2$.
   On déterminer E_5 :

   $$A - 5I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

   Ainsi, on voit que la matrice est de rang 1, la dimension du noyau est donc égale à 2, ce qui permet d'affirmer que A est diagonalisable.
   De plus, si on note C_1, C_2, C_3 les colonnes de cette matrice, on a

   $$\big(2C_1 + C_2 = 0 \iff (2, 1, 0) \in E_5\big) \quad et \quad \big(3C_1 + C_3 = 0 \iff (3, 0, 1) \in E_5$$

   La famille $\big((2, 1, 0), (3, 0, 1)\big)$ est libre, c'est donc une base de $E_5 = \mathrm{Vect}((2, 1, 0), (3, 0, 1))$.
   Ainsi, en notant

   $$P = \begin{pmatrix} 0\,2\,3 \\ 1\,1\,0 \\ 1\,0\,1 \end{pmatrix} \quad et \quad D = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 0\,5\,0 \\ 0\,0\,5 \end{pmatrix}$$

   On a $A = P.D.P^{-1}$.

Exercice 3 ***[Polynômes - Complexes]***

La question 1. est indépendante des autres. Les questions 2. et 3. **ne sont pas** indépendantes même si on peut traiter une grande partie de la question 3. sans avoir réussi la 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\mathrm{i}z^2 - (1 + \mathrm{i})z + 2\mathrm{i} - 1 = 0$ On calcule le discriminant : $\Delta = (1 + \mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}(2\mathrm{i} - 1) = 8 + 6\mathrm{i}$, puis on cherche les racines carrées complexes de ce discriminant, on résout : $\delta^2 = 8 + 6\mathrm{i}$.
   Avec $\delta = a + \mathrm{i}b$,

   $$\delta^2 = 8 + 6\mathrm{i} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ a^2 + b^2 = 10 \\ ab = 3 \end{cases} \iff \delta = \pm(3 + \mathrm{i})$$

Ainsi les deux racines sont

$$z_1 = \frac{(1+\mathrm{i})+(3+\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = 1-2\mathrm{i} \quad et \quad z_2 = \frac{(1+\mathrm{i})-(3+\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \mathrm{i}$$

2. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$.

   (a) En factorisant, on obtient : $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

   ✓ Pour $\theta \in]0, \pi[$, $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, ainsi, la forme trouvée est bien l'écriture exponentielle de $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   ✓ Pour $\theta = \pi$, $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 0$, il n'y a pas de forme exponentielle.

   ✓ Pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$, on a $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ car c'est un nombre strictement négatif.

   Ainsi l'écriture exponentielle est $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}$.

   (b) $\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \iff z = \frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$. (en effet $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$
   En factorisant de nouveau par l'angle moitié en haut et en bas, on obtient :

$$z = \frac{\mathrm{i}2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}} = -\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

   Si $\theta = \pi$, on obtient $z = 0$, sinon, on obtient $z = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\mathrm{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

   Dans tous les cas, $z \in \mathbb{R}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P_n = (X^2+1)^n - (X+\mathrm{i})^{2n}$.

   (a) Les termes en X^{2n} se simplifient, mais pas les termes en X^{2n-1} (la puissance n'apparaît que dans le développement de $(X+\mathrm{i})^{2n}$), ainsi P_n est de degré $2n-1$. Ainsi, il y a $2n-1$ racines comptées avec leur multiplicité. Comme P_n est à coefficients complexes non entièrement réels, les racines ne sont pas conjuguées deux à deux.

   (b) On peut factoriser : $P_n = ((X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i}))^n - (X+\mathrm{i})^{2n} = (X+\mathrm{i})^n\left[(X-\mathrm{i})^n - (X+\mathrm{i})^n\right]$.
   Par ailleurs $-\mathrm{i}$ n'annule pas $Q_n = (X-\mathrm{i})^n - (X+\mathrm{i})^n$: $Q_n(-\mathrm{i}) = (-2\mathrm{i})^n \neq 0$
   donc $-\mathrm{i}$ est de multiplicité exactement égale à n.

   (c) Il reste à factoriser Q_n, pour cela, on détermine ses racines complexes :

$$Q_n(z) = 0 \iff (z-\mathrm{i})^n = (z+\mathrm{i})^n$$

   et comme $z \neq -\mathrm{i}$, ceci est équivalent à $\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^n = 1$ sachant que $z-\mathrm{i} \neq z+\mathrm{i}$, autrement dit le quotient ne peut pas être égale à 1.
   On résout avec les racines n-ième de 1 :

$$\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^n = 1 \; et \; \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} \neq 1 \iff \exists k \in \{1, \dots n-1\},\ \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in \{1, \dots n-1\},\ z = -\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = z_k$$

   Ceci permet d'avoir la factorisation de $P_n = (X+\mathrm{i})^n \prod_{k=1}^{n-1}(X-z_k)$.

Exercice 4 ***[Fractions Rationnelles - Intégration]***

On considère la fraction rationnelle $F = \frac{5X^3+X^2+16X+4}{X^4+4X^2}$

1. $X^4+4X^2 = X^2(X^2+4)$, ainsi la forme de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX+d}{X^2+4}$$

   On obtient la valeur de b en multipliant par X^2 puis en prenant la valeur en 0, ce qui donne $b = 1$.
   On calcule $F - \frac{1}{X^2} = \frac{5X^3+X^2+16X+4-(X^2+4)}{X^4+4X^2} = \frac{5X^3+16X}{X^4+4X^2} = \frac{5X^2+16}{X^3+4X}$
   On obtient alors la valeur de a en multipliant cette fraction par X puis en prenant la valeur en 0, ce qui donne $a = 4$.
   On calcule $\frac{5X^2+16}{X^3+4X} - \frac{4}{X} = \frac{5X^2+16-4X^2-16}{X(X^2+4)} = \frac{X^2}{X(X^2+4)} = \frac{X}{X^2+4}$
   on obtient ainsi $c = 1$ et $d = 0$.
   D'où

$$F = \frac{4}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{X}{X^2+4}$$

2. On doit se placer sur $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ ou sur $I_2 = \mathbb{R}_-^*$.
Dans chaque cas , il existe une constante $C_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2)$ telle que pour tout $x \in I_i$:
$$\int f(x)dx = \int \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2+4}dx = 4\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C_i$$

8.4 Correction du devoir du 9 septembre 2015

Exercice 1

1. On commence par déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P = X^4 + X^2 - 2$.
En posant $Y = X^2$, on obtient $P = Y^2 + Y - 2$ dont les racines évidentes sont 1 et -2.
Ainsi, on obtient la factorisation du polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$
$P = (Y-1)(Y+2) = (X^2-1)(X^2+2) = \underbrace{(X-1)(X+1)(X^2+2)}_{\text{factorisation dans } \mathbb{R}} = \underbrace{(X-1)(X+1)(X-\mathrm{i}\sqrt{2})(X+\mathrm{i}\sqrt{2})}_{\text{factorisation dans } \mathbb{C}}$
Ceci permet de donner les formes des décompositions en éléments simples :
   - ✓ Dans $\mathbb{C}(X)$: $F = Q + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{X-\mathrm{i}\sqrt{2}} + \dfrac{d}{X+\mathrm{i}\sqrt{2}}$
   où Q est un polynôme de degré 1, a et b sont réels et c et d complexes.
   - ✓ Dans $\mathbb{R}(X)$: $F = Q + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{\alpha X+\beta}{X^2+2}$
   où Q, a et b sont les mêmes que pour la décomposition dans $\mathbb{C}$ et α et β sont deux réels.
2. On effectue la division euclidienne de X^5 par $X^4 + X^2 - 2$, on obtient : $X^5 = X(X^4 + X^2 - 2) + (-X^3 + 2X)$
Ainsi $Q = X$ et $F = X + \dfrac{-X^3+2X}{X^4+X^2-2}$.
3. $G = \dfrac{-X^3+2X}{X^4+X^2-2}$ est telle que $G(-X) = -G(X)$.
La fraction est impaire. En utilisant cette relation dans la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$, on obtient :
$$a = b \quad et \quad c = d$$
4. Pour déterminer la valeur de a, on multiplie G par $X - 1$ puis on évalue en 1, on obtient $a = \dfrac{1}{6}$.
Ainsi $b = \dfrac{1}{6}$.
Pour déterminer la valeur de c, on multiplie G par $(X - \mathrm{i}\sqrt{2})$ puis on évalue en $\mathrm{i}\sqrt{2}$, on obtient
$c = \dfrac{-\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^3 + 2\mathrm{i}\sqrt{2}}{2\mathrm{i}\sqrt{2}((\mathrm{i}\sqrt{2})^2-1)} = \dfrac{2\mathrm{i}\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}}{-6\mathrm{i}\sqrt{2}} = \dfrac{-2}{3}$ et $d = \dfrac{-2}{3}$
Donc $G = \dfrac{1/6}{X-1} + \dfrac{1/6}{X+1} + \dfrac{-2/3}{X-\mathrm{i}\sqrt{2}} + \dfrac{-2/3}{X+\mathrm{i}\sqrt{2}}$ (décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de G)
D'où, pour F : $F = X + \dfrac{1/6}{X-1} + \dfrac{1/6}{X+1} + \dfrac{-2/3}{X-\mathrm{i}\sqrt{2}} + \dfrac{-2/3}{X+\mathrm{i}\sqrt{2}}$
Et en mettant les deux dernières fractions au même dénominateur, on obtient la décomposition dans $\mathbb{R}$:
$G = \dfrac{1/6}{X-1} + \dfrac{1/6}{X+1} + \dfrac{-\frac{4}{3}X}{X^2+2}$ et $F = X + \dfrac{1/6}{X-1} + \dfrac{1/6}{X+1} + \dfrac{-\frac{4}{3}X}{X^2+2}$
5. En utilisant la décomposition en éléments simples de G dans $\mathbb{R}$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} xG(x) = a + b + \alpha$
or $\lim\limits_{x\to+\infty} xG(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^4+2x^2}{x^4+x^2-2} = -1$
Ceci permet de vérifier la cohérence des résultats obtenus grâce à l'unicité de la limite : $a + b + \alpha = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{4}{3} = -1$.

Exercice 2

1. On linéarise $\cos^4(\theta)$ en utilisant les complexes :
$$\begin{aligned}\cos^4(\theta) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^4\\ &= \frac{1}{2^4}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}\right)\\ &= \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}\end{aligned}$$
2. On peut maintenant calculer l'intégrale I :
$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}\right)d\theta\\ &= \left[\frac{1}{32}\sin(4\theta) + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{3}{8}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}\end{aligned}$$

3. On utilise le changement de variable $x = \tan(t)$. La fonction $t \mapsto \tan(t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on peut donc faire le changement de variable,
   de plus : $\tan(0) = 0$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ (ceci permet de changer les bornes)
   pour l'élément différentiel : on a $x = \tan(t)$ donc $dx = \tan'(t)dt = (1 + \tan^2(t))dt$
   On a ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2(t))dt}{(1+\tan^2(t))^3} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{(1+\tan^2(t))^2}$
   Or $1 + \tan^2(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$ donc $\dfrac{1}{(1+\tan^2(t))^2} = \cos^4(t)$.
   Au final $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(t)dt = I = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$.

Exercice 3

1. *On rappelle que le rang de f est égal à la dimension de* $\mathrm{Im}\,(f)$*, et qu'il est également égal au rang de la matrice A, les colonnes de la matrice A étant les images des vecteurs de la base canonique, ces vecteurs engendrent justement* $\mathrm{Im}\,(f)$.
   Pour calculer le rang de f, on détermine le rang de la matrice A.
   On remarque que les deux premières colonnes sont identiques , donc $\mathrm{rg}(A) < 3$.
   De plus les colonnes 2 et 3 forment une famille libre (deux vecteurs non colinéaires), donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   Ainsi $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = 2$.
   La fonction f est une application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie, on peut donc appliquer le théorème du rang :
   $$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \mathrm{rg}(f)$$
   Ici, on obtient $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = 1$.
   $\mathrm{Ker}\,(f)$ est donc un espace vectoriel de dimension 1, pour en trouver une base, il suffit de trouver un élément non nul de $\mathrm{Ker}\,(f)$.
   Or on a vu sur la matrice A que les colonnes C_1 et C_2 sont égales, et comme A est la matrice de f relativement à la base canonique, elle représente en colonne $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ et $f(0,0,1)$
   On en déduit que $f(1,0,0) = f(0,1,0)$.
   Comme f est linéaire :
   $$f(1,0,0) = f(0,1,0) \iff f(1,0,0) - f(0,1,0) = (0,0,0) \iff f(1,-1,0) = (0,0,0)$$
   Ainsi $(1,-1,0) \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et comme $\mathrm{Ker}\,(f)$ est de dimension 1, on en déduit que :
   $$\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}((1,-1,0)) \text{ et } \big((1,-1,0)\big) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\,(f)$$
   Autre méthode pour trouver $\mathrm{Ker}\,(f)$ *: résoudre $f(x,y,z) = (0,0,0)$ autrement dit matriciellement :*
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   ce qui donne un système, dont les solutions sont $\mathrm{Ker}\,(f) = \{(x,y,z) | x = -y \text{ et } z = 0\}$.
   Puis trouver une base de cet espace : $\mathrm{Ker}\,(f) = \{(-y,y,0) | y \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1,1,0) | \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-1,1,0))$.
2. $\mathrm{rg}(f) < 3$ donc $\mathrm{Im}\,(f) \neq E$ donc f n'est pas surjective.
   $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) > 0$ donc $\mathrm{Ker}\,(f) \neq \{0_E\}$ donc f n'est pas injective.
   On rappelle de plus que pour un endomorphisme d'un espace de dimension finie : f injective $\iff$ f surjective
3. On a déjà prouvé que $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension 2, donc c'est bien un plan. De plus, il est engendré par les vecteurs $f(1,0,0) = (1,4,1)$ et $f(0,0,1) = (-1,0,3)$, qui forment donc une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils engendrent donc un plan).
   Ainsi $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}((1,4,1),(-1,0,3))$, pour déterminer l'équation de ce plan, on peut utiliser plusieurs méthodes, par exemple :
   $$(x,y,z) \in \mathrm{Im}\,(f) \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 (x,y,z) = a(1,4,1) + b(-1,0,3)$$
   Ce qui correspond à un système, et la question qui nous intéresse est de savoir à quelles conditions sur (x,y,z) le système admet des solutions (il s'agit donc de trouver les « équations de compatibilité » du système dont les inconnues sont a et b, grâce à la méthode du pivot de Gauss par exemple) :
   $$(x,y,z) = a(1,4,1) + b(-1,0,3) \iff \begin{cases} a - b = x \\ 4a = y \\ a + 3b = z \end{cases} \iff \begin{cases} -b + a = x \\ 4a = y \\ 0 = 3x - y + z \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 - L_2 \end{cases}$$
   Ainsi, l'équation du plan est $0 = 3x - y + z$.
4. On calcule $P_A = \det(A - \lambda I_3)$ en réalisant des opérations sur les lignes et les colonnes du déterminant afin d'avoir une forme factorisée dès le départ (par exemple $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ permet de mettre λ en facteur).
   On obtient : $P_A = -\lambda(4-\lambda)^2$

5. A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_4) = 2$
où E_4 désigne le sous-espace vectoriel associé à la valeur propre 4.
On détermine donc la dimension de E_4 c'est à dire la dimension du noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à $A - 4I_3$.
$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
c'est une matrice de rang 2 car les colonnes C_1 et C_2 forment une famille libre et que la troisième colonne s'exprime en fonction des autres : $C_3 = -C_2$ Ainsi la dimension du noyau est $3 - 2 = 1$ d'après le théorème du rang, autrement dit $\dim(E_4) = 1$.
On en déduit que A n'est pas diagonalisable.
On remarquera que la réponse à cette question n'est pas liée au fait que le déterminant de A est nul, ce qui n'a pas d'influence sur le fait que A soit ou ne soit pas diagonalisable.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante :
$$(E) \qquad \cos(x)y'(x) + \sin(x)y(x) = 1 + x$$

1. L'équation homogène associée à (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est :
$$(EH) \qquad \cos(x)y'(x) + \sin(x)y(x) = 0$$
Sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \mapsto \cos(x)$ ne s'annule pas (équation résolue), ainsi $(EH) \iff y'(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}y(x) = 0$
Les solutions d'une telle équation sont de la forme : $y_H : x \longmapsto C\mathrm{e}^{-F(x)}$
où $C \in \mathbb{R}$ et F est une primitive de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
On détermine donc une telle primitive (on reconnaît une forme en $-u'/u$), ainsi on peut choisir F définie par
$$F(x) = -\ln|\cos(x)| = -\ln(\cos(x)) \quad \text{car } \cos(x) > 0 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
Ainsi les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme :
$$y_H : x \mapsto C\mathrm{e}^{\ln(\cos(x))} = C\cos(x) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

2. On utilise la méthode de la variation de la constante, ainsi on cherche une solution particulière de (E) sous la forme : $y_P : x \mapsto A(x)\cos(x)$.
On calcule y_P' et on l'insère dans (E) :
Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
$y_P'(x) = A'(x)\cos(x) - A(x)\sin(x)$
$\cos(x)y_P'(x) + \sin(x)y_P(x) = A'(x)\cos^2(x) - A(x)\cos(x)\sin(x) + A(x)\cos(x)\sin(x) = A'(x)\cos^2(x)$
Ainsi y_P est une solution de E si et seulement si pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $A'(x) = \frac{1+x}{\cos^2(x)}$.
On cherche donc une primitive de $x \mapsto \frac{1+x}{\cos^2(x)}$, à l'aide d'un calcul par parties. Si on pose $u(x) = 1+x$ et $v'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ avec $u'(x) = 1$ et $v(x) = \tan(x)$.
u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et on en déduit, en utilisant le calcul effectué à la question 1. :
$$\int \frac{1+x}{\cos^2(x)}dx = (1+x)\tan(x) - \int \tan(x)dx = (1+x)\tan(x) + \ln(\cos(x)) + k \quad k \in \mathbb{R}$$
Ainsi, on peut choisir $A : x \mapsto (1+x)\tan(x) + \ln(\cos(x))$.
Et on obtient une solution particulière : $y_P : x \mapsto (1+x)\sin(x) + \cos(x)\ln(\cos(x))$.

3. Pour obtenir la solution générale de (E) on ajoute la solution générale de (EH) et une solution particulière de (E), ainsi on obtient :
$$y : x \mapsto C\cos(x) + (1+x)\sin(x) + \cos(x)\ln(\cos(x)) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$