Mardi 08 Septembre 2020 – Test de niveau en Mathématiques
Grenoble INP – Pagora - 3FMT3065 - 1ère année : 1E, 1A
Tous documents autorisés, calculatrices autorisées – Durée : 1h30

Sujet comportant 3 exercices avec barème donné : nombres complexes, polynômes, fractions rationnelles, primitives, équation différentielle linéaire.

1- (6 pts). Premier exercice : nombres complexes, polynômes

On donne le polynôme P suivant dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = X^3 + \alpha X^2 + 7X + 6$$

1-1 (2 pts)

Effectuer la *division euclidienne* du polynôme $P(X)$ par le polynôme $(X+2)$ dans $\mathbb{R}[X]$. Donner les expressions des polynômes quotient $Q(X)$ et reste $R(X)$, paramétrés par le réel α.

Indication : faire la division euclidienne du polynôme $P(X)$ par le polynôme $(X+2)$ dans $\mathbb{R}[X]$ revient à chercher un polynôme $Q(X)$ de degré 2 et un polynôme $R(X)$ constant tels que :

$$P(X) = (X+2)Q(X) + R(X)$$

Cette question peut être effectuée sans même connaître la division euclidienne de polynômes.

1-2 (1 pt)

Déterminer la valeur numérique du réel α pour que le polynôme P soit *divisible* par le polynôme $(X+2)$ dans $\mathbb{R}[X]$. *On gardera cette valeur de α pour la question suivante*.

Donner alors l'expression du polynôme quotient $Q(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1-3 (3 pts)

Donner les racines complexes conjuguées du polynôme P sous les formes suivantes : *algébrique* $(a+ib)$, *exponentielle* $\rho e^{i\varphi}$ *avec* $\varphi \in \left]-\pi, +\pi\right]$ *argument principal* exprimé en radiants.

Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ sous forme algébrique.

2- (9 pts). Deuxième exercice : polynômes, fractions rationnelles, primitives

On donne la fraction rationnelle suivante dans $\mathbb{R}[X]$:

$$F(X) = \frac{X-1}{(X+2)(X^2+2X+3)}$$

2-1 (2 pts)

Expliquer pourquoi la décomposition en éléments simples (D.E.S.) dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de *façon unique* comme *indiqué* :

$$F(X) = \frac{X-1}{(X+2)(X^2+2X+3)} = \frac{A}{X+2} + \frac{BX+C}{X^2+2X+3}$$

avec trois constantes réelles (A, B, C)

2-2 (2,5 pts)

Déterminer numériquement les trois constantes réelles (A, B, C). Donner l'expression de $F(X)$.

Vérifier vos valeurs numériques en calculant, à titre d'exemple : $F(1)$.

2-3 (0,5 pt)

Soit la fonction réelle $x \to f(x)$ de la variable réelle, définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x^2+2x+3)}$$

Montrer que :

$$\int f(x)dx = \int \frac{Adx}{x+2} + \int \frac{(Bx+C)dx}{x^2+2x+3}$$

2-4 (4 pts)

Mettre le dénominateur du $2^{ème}$ terme du membre de droite sous la *forme canonique* suivante :

$x^2 + 2x + 3 = (x+a)^2 + b^2$ avec deux coefficients réels (a, b) que vous déterminerez.

Justifier ensuite le changement de variable suivant, de x à t tel que :

$$t = \frac{x+a}{b}$$

Donner alors la primitive $\int f(x)dx$, *celle avec la constante nulle*, en n'oubliant pas de revenir à la variable x de départ.

3- (5 pts). Troisième exercice : nombres complexes, équation différentielle linéaire

On donne l'équation différentielle linéaire suivante dans $\mathbb{R}$, à coefficients constants avec second membre :

$$y"(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-2t} \quad ; \quad (E)$$

3-1 (1 pt)

Chercher une *solution particulière* en vous inspirant de l'expression du second membre, à savoir :

$$y_P(t) = D.e^{-2t}$$

avec une constante numérique réelle D que vous déterminerez.

3-2 (1 pt)

On s'intéresse maintenant à *l'équation homogène* associée :

$$y"(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \quad ; \quad (EH)$$

On appelle *équation caractéristique*, l'équation du second degré suivante formée à partir de (EH) :

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

Résoudre l'équation caractéristique en donnant les valeurs numériques des deux réels (α, β) qui représentent, respectivement, les partie réelle et imaginaire de ses racines.

3-3 (3 pts)

Puisque l'expression de la *solution générale* de l'équation homogène associée s'écrit ainsi :

$$y_H(t) = e^{\alpha t}[\lambda.cos(\beta t) + \mu.sin(\beta t)] \; avec \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Donner la *solution générale* de l'équation différentielle (E).

On adjoint maintenant au problème posé les *conditions initiales suivantes* portant sur la fonction et sa dérivée *au temps initial*, soit :

$$\begin{cases} y(0) = \dfrac{3}{2} \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (CI)$$

Déterminer la *solution unique dans* $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) munie de ces conditions initiales spécifiées par (CI).

Correction du DS de Maths I : test de niveau pour l'année 2020-2021

/20 pts

Premier exercice (6 pts)

1-1 (2 pts = 1 pt pour Q + 1 pt pour R)

Effectuer la *division euclidienne* du polynôme $P(X)$ par le polynôme $(X+2)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
Donner les expressions des polynômes quotient $Q(X)$ et reste $R(X)$, paramétrés par le réel α.

Nous commençons par poser la division euclidienne des 2 polynômes :

$$\begin{array}{l|l} X^3+\alpha X^2+7X+6 & X+2 \\ -X^3 \ -2X^2 & X^2+(\alpha-2)X+(-2\alpha+11) \\ (\alpha-2)X^2+7X & \\ -(\alpha-2)X^2-2(\alpha-2)X & \\ (-2\alpha+4+7)X+6 & \\ -(-2\alpha+11)X-2(-2\alpha+11)+6 & \\ 4\alpha-22+6 & \end{array}$$

Le reste est de degré 0 et le quotient est de degré 2, nous obtenons :

$$\boxed{\begin{cases} Q(X)=X^2+(\alpha-2)X+(-2\alpha+11) \\ R(X)=4\alpha-16 \end{cases}}$$

1-2 (1 pt = 0,5 pt pour alpha + 0,5 pt pour Q)

Déterminer la valeur numérique du réel α pour que le polynôme P soit *divisible* par le polynôme $(X+2)$ dans $\mathbb{R}[X]$. *On gardera cette valeur de α pour la question suivante*.
Donner alors l'expression du polynôme quotient $Q(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Pour que le polynôme P soit divisible par le facteur $(X+2)$, le reste doit être nul, ce qui nous donne la valeur numérique du paramètre α :

$$R=4\alpha-16=0 \rightarrow 4\alpha=16 \rightarrow \boxed{\alpha=4}$$

Il suffit maintenant de remplacer cette valeur dans l'expression précédente de Q, il vient :

$$\boxed{Q(X)=X^2+(\alpha-2)X+(-2\alpha+11)=X^2+2X+3}$$

1-3 (3 pts = Forme alg (0,5 + 0,5 pt) + forme expo (0,5 rho + 0,5 phi) + Factor (1 pt))

Donner les racines complexes conjuguées du polynôme P sous les formes suivantes : *algébrique* $(a+ib)$, *exponentielle* $\rho e^{i\varphi}$ *avec* $\varphi \in \,]-\pi,+\pi]$ *argument principal* exprimé en radiants.

Compte tenu des questions précédentes avec la valeur de α trouvée, nous avons dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^3+4X^2+7X+6=(X+2)(X^2+2X+3)$$

Si nous nous intéressons au facteur du second degré, nous voyons qu'il a un discriminant négatif : $\Delta=4-4.3=-8=2.4i^2=2.(2i)^2$

Les racines complexes du polynôme sont dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{cases} X_1=\dfrac{-2-2\sqrt{2}i}{2}=-1-i\sqrt{2} \\ X_2=-1+i\sqrt{2} \end{cases}$$

Ecriture des racines sous forme exponentielle :

$$-1\pm i\sqrt{2}=\sqrt{3}\left[\frac{-1}{\sqrt{3}}\pm i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]=\rho.e^{i\varphi}\ avec\ \rho=\sqrt{3}\ et\ \varphi=\pm 2{,}19\ rad\ (ou\ \pm 125°)$$

Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ sous forme algébrique. (1 pt)

La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$X^3+4X^2+7X+6=(X+2)(X-X_1)(X-X_2)$$

Ou encore dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{X^3+4X^2+7X+6=(X+2)\big(X+1+i\sqrt{2}\big)\big(X+1-i\sqrt{2}\big)}$$

Deuxième exercice (9 pts)

2-1 (2 pts)

Expliquer pourquoi la décomposition en éléments simples (D.E.S.) dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de *façon unique* comme *indiqué* :

$$F(X) = \frac{X-1}{(X+2)(X^2+2X+3)} = \frac{A}{X+2} + \frac{BX+C}{X^2+2X+3}$$

avec trois constantes réelles (A, B, C)

La fraction rationnelle est telle que deg(Num) < deg(Dén), par conséquent elle ne présente *pas de partie entière*. Si on s'intéresse aux racines du dénominateur, on constate qu'il n'en existe *qu'une seule racine réelle* : $X = -2$. Les deux autres racines sont complexes (comme nous l'avons vu à l'exercice précédent). (1 pt)

Il en résulte *un élément simple de première espèce* et un *élément simple de deuxième espèce*. L'expression au numérateur des éléments simples est de degré 0 pour le premier élément et de degré 1 pour le deuxième élément. (1 pt)

Nous obtenons donc l'expression donnée dans l'énoncé :

$$F(X) = \frac{X-1}{(X+2)(X^2+2X+3)} = \frac{A}{X+2} + \frac{BX+C}{X^2+2X+3}$$

On sait que cette expression est unique car nous n'avons qu'une solution unique pour les trois réels (A, B, C).

2-2 (2,5 pts = 0,5 pt/coeff x 3 + 0,5 pt F(X) + 0,5 pt F(1))

Déterminer numériquement les trois constantes réelles (A, B, C). Donner l'expression de $F(X)$.

Partant de l'expression donnée, on peut multiplier chaque élément par le facteur qui lui fait défaut de façon à *avoir le même dénominateur*. Comme la DES est unique, il nous suffira ensuite d'identifier les coefficients des deux numérateurs trouvés, après les avoir développés.

$$\frac{X-1}{(X+2)(X^2+2X+3)} = \frac{A}{X+2} + \frac{BX+C}{X^2+2X+3} = \frac{A(X^2+2X+3)+(BX+C)(X+2)}{(X+2)(X^2+2X+3)}$$

L'expression développée du numérateur devient :

$$(A+B)X^2 + (2A+2B+C)X + 3A + 2C = X - 1$$

Il nous suffit d'identifier, terme à terme, en remarquant que la deuxième ligne contient la première :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2(A+B)+C=1 \\ 3A+2C=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C=1 \\ 3A=-1-2 \\ B=-A \end{cases}$$

D'où il vient les valeurs suivantes des trois constantes réelles : (1,5 pt = 0,5 pt/coeff x 3)

$$\boxed{A=-1 \ ; B=+1 \ ; \ C=1}$$

On en déduit l'expression de $F(X)$: (0,5 pt)

$$\boxed{F(X) = \frac{X-1}{(X+2)(X^2+2X+3)} = \frac{-1}{X+2} + \frac{X+1}{X^2+2X+3}}$$

Vérifier vos valeurs numériques en calculant, à titre d'exemple : $F(1)$. (0,5 pt)

$$F(X) = \frac{X-1}{(X+2)(X^2+2X+3)} = \frac{-1}{X+2} + \frac{X+1}{X^2+2X+3}$$

On vérifie que : $\boxed{F(1) = 0 = \frac{-1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3}}$; les constantes trouvées vérifient bien la valeur numérique : $F(1) = 0$.

2-3 (0,5 pt)

Soit la fonction réelle $x \to f(x)$ de la variable réelle, définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x^2+2x+3)}$$

Montrer que :

$$\int f(x)dx = \int \frac{Adx}{x+2} + \int \frac{(Bx+C)dx}{x^2+2x+3}$$

L'expression à étudier est *formellement identique* à celle de la fraction rationnelle précédente, nous avons donc :

$$f(x)=\frac{x-1}{(x+2)(x^2+2x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$$

Et, d'après la question précédente, nous connaissons même les valeurs numériques des trois constantes.

Nous avons donc la *primitive d'une somme* qui est la *somme des primitives* : (0,5 pt)

$$\int f(x)dx=\int\frac{Adx}{x+2}+\int\frac{(Bx+C)dx}{x^2+2x+3}$$

2-4 (4 pts = 0,5 pt (a) + 0,5 pt (b) +changt (1 pt) + 2 pts)

Mettez le dénominateur du 2ème terme sous la *forme canonique* suivante : 0,5 pt(a) + 0,5 pt(b)
$x^2+2x+3=(x+a)^2+b^2$ avec deux coefficients réels (a,b) que vous déterminerez.

Mettre sous forme canonique le polynôme du second degré consiste à trouver le développement d'un carré, on voit de suite :

$$(x+1)^2=(x^2+2x)+1\rightarrow x^2+2x=(x+1)^2-1$$

Mais l'expression donnée n'est pas tout à fait celle indiquée :

$$x^2+2x+3=(x+1)^2-1+3=(x+1)^2+2=(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$$

On a ainsi trouvé les coefficients réels (a,b) tels que :

$$x^2+2x+3=(x+a)^2+(b)^2=(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$$

Ce sont :

$$\boxed{a=+1\ ;b=\ \sqrt{2}}$$

Justifier ensuite le changement de variable suivant, de x à t tel que : (1 pt)

$$t=\frac{x+a}{b}$$

Quand on observe l'expression du dénominateur, on comprend que choisir la variable t telles que :

$$bt=x+a$$

Revient à effectuer ensuite le calcul suivant au dénominateur :

$$(x+a)^2+(b)^2=(bt)^2+(b)^2=b^2(t^2+1)$$

Quant au numérateur, nous avons :

$$(x+1)dx=(x+a)dx=bt.bdt=b^2t.dt$$

Donner alors la primitive $\int f(x)dx$, *celle avec la constante nulle*, en n'oubliant pas de revenir à la variable x de départ. (2 pts = 1 pt/terme x 2 termes)

$$\int f(x)dx=-\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{(x+1)dx}{x^2+2x+3}=-ln|x+2|+\int\frac{b^2t.dt}{b^2(t^2+1)}=-ln|x+2|+\int\frac{tdt}{t^2+1}$$

Si on s'intéresse au dernier terme : $t.dt=\frac{1}{2}d(t^2+1)$

D'où il vient :

$$\int f(x)dx=-ln|x+2|+\frac{1}{2}ln(t^2+1)$$

Attention, il faut revenir à la variable de départ, soit x, d'après les calculs précédents, nous avons :

$$t^2+1=\frac{(x+a)^2+(b)^2}{b^2}=\frac{x^2+2x+3}{2}$$

Le résultat final est donc pour une primitive, celle avec la constante numérique nulle :

$$\boxed{\int\frac{(x-1)dx}{(x+2)(x^2+2x+3)}=-ln|x+2|+\frac{1}{2}ln\left|\frac{x^2+2x+3}{2}\right|}$$

On pourrait ne pas mettre de valeur absolue au dernier terme car le numérateur a été mis sous l'expression de la somme de deux carrés (forme canonique) mais on ne nous le demande pas.

Troisième exercice (5 pts)

3-1 (1 pt)

Chercher une *solution particulière* en vous inspirant de l'expression du second membre, à savoir :

$$y_P(t)=D.e^{-2t}$$

avec une constante numérique réelle D que vous déterminerez.

Il nous suffit de remplacer l'expression choisie pour $y_P(t)$ dans l'équation (E) pour pouvoir ensuite identifier les deux membres :

$$\begin{cases} y_P(t) = De^{-2t} \\ y'_P(t) = -2De^{-2t} \\ y''_P(t) = 4De^{-2t} \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$(4D - 2.2D + 2D)e^{-2t} = 1.e^{-2t}$$

D'où il vient :

$$2D = 1 \rightarrow D = \frac{1}{2}$$

Ce qui donne comme solution particulière :

$$\boxed{y_P(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}}$$

3-2 (1 pt = 0,5 pt alpha + 0,5 pt beta)

Résoudre l'équation caractéristique en donnant les valeurs numériques des deux réels (α, β) qui représentent, respectivement, les partie réelle et imaginaire de ses racines.

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle de départ est :

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

Qui peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$(r+1)^2 + 1 = 0 \rightarrow (r+1)^2 - i^2 = 0 \rightarrow (r+1+i)(r+1-i) = 0$$

On voit les racines complexes conjuguées :

$$r_1 = -1 + i \;\; ; r_2 = -1 - i$$

Bien de la forme :

$$\boxed{\alpha \pm i\beta = -1 \pm i \qquad avec \qquad \alpha = -1 \; et \; \beta = 1}$$

3-3 (3 pts = 1 pt SG + 1 pt lambda + 1 pt mu)

Donner la *solution générale* de l'équation différentielle (E).

En remplaçant les parties réelle et imaginaire des racines complexes de l'équation caractéristique, nous obtenons :

$$y_H(t) = e^{\alpha t}[\lambda.cos(\beta t) + \mu.sin(\beta t)] \; avec \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Ou encore :

$$y_H(t) = e^{-t}[\lambda.cos(t) + \mu.sin(t)] \; avec \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Commençons par écrire la solution générale de l'équation différentielle (E) proposée, nous savons que : (1 pt)

$$\boxed{y(t) = y_P(t) + y_H(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t}[\lambda.cos(t) + \mu.sin(t)]}$$

Déterminer la *solution unique dans* $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) munie de ces conditions initiales spécifiées par (CI).

$$\begin{cases} y(0) = \frac{3}{2} \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (CI)$$

Ensuite, il suffit de dériver deux fois cette expression et d'égaler aux conditions initiales spécifiées dans l'énoncé :

$$y'(t) = -e^{-2t} - e^{-t}[\lambda.cos(t) + \mu.sin(t)] + e^{-t}[-\lambda.sin(t) + \mu.cos(t)]$$

A partir des conditions initiales, nous avons :

$$\begin{cases} y(0) = \frac{3}{2} \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (CI) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + \lambda = \frac{3}{2} \\ -1 - \lambda + \mu = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 3 \end{cases}$$

Le résultat final est le suivant : (2 pts = 1 pt lambda + 1 pt mu)

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t}[cos(t) + 3sin(t)]}$$

Autres façons de résoudre le problème et ses différentes questions :

Pour la question

1-1

Pour un étudiant ne connaissant pas la division euclidienne des polynômes, d'après l'énoncé, il peut poser le résultat de cette division (comme pour les réels) :

$$P(X) = (X+2)(X^2+\beta X+\gamma)+\delta$$

Qui est alors à identifier avec le polynôme donné dans l'énoncé de façon à trouver les coefficients (β, γ, δ) en fonction du paramètre α :

Commençons par développer $P(X)$:

$$P(X) = X^3+\beta X^2+\gamma X+2X^2+2\beta X+2\gamma+\delta$$

Factorisons ensuite de façon à pouvoir identifier les coefficients de tous les monômes :

$$P(X) = X^3+(\beta+2)X^2+(\gamma+2\beta)X+(2\gamma+\delta)$$

Avec le polynôme de l'énoncé, nous avons :

$$P(X) = X^3+\alpha X^2+7X+6$$

Par identification, nous obtenons le système de 3 équations à 3 inconnues à trouver en fonction du paramètre α :

$$\begin{cases} \beta+2=\alpha \\ \gamma+2\beta=7 \\ 2\gamma+\delta=6 \end{cases} \to \begin{cases} \beta=\alpha-2 \\ \gamma=7-2(\alpha-2) \\ \delta=6-2\gamma \end{cases} \to \begin{cases} \beta=\alpha-2 \\ \gamma=-2\alpha+11 \\ \delta=6-2(-2\alpha+11) \end{cases} \to \begin{cases} \beta=\alpha-2 \\ \gamma=-2\alpha+11 \\ \delta=4\alpha-16 \end{cases}$$

Il vient donc :

$$\boxed{\begin{cases} Q(X)=X^2+(\alpha-2)X+(-2\alpha+11) \\ R(X)=4\alpha-16 \end{cases}}$$

Pour la question

1-2

Si on veut que le polynôme $P(X)$ soit divisible par $(X+2)$ alors le reste doit être nul ou encore nous devons avoir :

$$P(-2)=0 \to -8+4\alpha-14+6=0 \to 4\alpha=22-6=16$$

D'où l'on trouve :

$$\boxed{\alpha=4}$$

Pour la question

2-2

En mettant la fraction rationnelle au même dénominateur, nous trouvons l'égalité suivante, valable pour tout X :

$$X-1=A(X^2+2X+3)+(BX+C)(X+2)$$

En particulier, pour : $X=-2$, nous trouvons (problème pour la fraction rationnelle car non définie en $X = -2$ mais on va passer ce point sous silence !).

$$-3=A(4-4+3) \to -3=3A \to \boxed{A=-1}$$

Ensuite, en remplaçant, nous pouvons identifier les deux expressions du polynôme numérateur, soit :

$$X-1=-X^2-2X-3+BX^2+(2B+C)X+2C$$

Ou encore :

$$X-1=(B-1)X^2+(2B+C-2)X+2C-3$$

On trouve de suite :

$$B=1 \; puis \; 2C-3=-1 \to \boxed{B=1 \; et \; C=1}$$

Mardi 07 Septembre 2021 – Test de niveau en Mathématiques
Grenoble INP – Pagora - 3FMT3065 - 1ère année : 1E, 1A
Tous documents autorisés, calculatrices autorisées – Durée : 1h30

Sujet composé de 3 exercices qui portent sur 5 chapitres sur 6 : nombres complexes, polynômes, fractions rationnelles, primitives, équation différentielle.

1- (8 pts). Premier exercice : nombres complexes, polynômes.

On donne le polynôme P suivant du *quatrième degré* dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = X^4 + 4X - 1$$

Le tracé des courbes des fonctions réelles : $f(x) = x^4$ et $g(x) = 1 - 4x$ tels que $f(x) = g(x)$ nous montre qu'il existe *deux racines réelles* de signe opposé.

Par conséquent, on peut envisager *une factorisation* du polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ en *deux polynômes* du second degré pour *chercher toutes ses racines*.

1-1 (2 pts)

Donner le système de 4 équations à 4 inconnues réelles (a, b, c, d) à partir de l'identification, terme à terme, des 2 expressions du polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^4 + 4X - 1 = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$$

1-2 (4 pts)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le *système précédent* pour trouver le quadruplet (a, b, c, d).

En déduire la factorisation proposée en donnant le quadruplet *sous sa forme radicale*.

Indications : on pourra chercher à exprimer littéralement 3 coefficients en fonction du quatrième par exemple, a. L'équation $u^3 + 4u - 16 = 0$ a pour solution évidente $u = 2$.

1-3 (2 pts)

Donner les 2 racines réelles sous leur forme radicale et calculer les numériquement, *vous trouverez* de façon approchée :

$$X_1 \cong 0{,}2490 \quad ; X_2 \cong -1{,}6633$$

Démontrer (sans les calculer) que les deux autres racines constituent une *paire complexe conjuguée*.

2- (6 pts). Deuxième exercice : nombres complexes, primitives, fractions rationnelles

Jean BERNOUILLI a démontré le résultat suivant en 1702, portant sur l'arc tangente d'un nombre complexe :

$$Arctan(z) = \frac{1}{i} ln\left\{\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^{1/2}\right\}$$

Il est proposé, dans cet exercice, de *démontrer ce résultat* par deux voies distinctes.

2-1 (3 pts)

On pose : $t = Arctan(z)$, en vous aidant des formules d'EULER appliquées à $\tan(t)$, en déduire, après calculs que vous donnerez, l'expression recherchée.

2-2 (3 pts)

En appliquant le résultat portant sur une primitive de la fonction $h: z \to \frac{1}{1+z^2}$

$$Arctan(z) = \int \frac{dz}{1 + z^2} - C; C \in \mathbb{R}$$

Effectuer une décomposition en éléments simples (DES) dans $\mathbb{C}[X]$ de $h(z)$.
En déduire, après intégration de chacun des 2 termes, l'expression souhaitée.

3- (/6 pts). Troisième exercice : fonctions trigonométriques, polynômes

On s'intéresse aux expressions des cosinus linéaires de l'angle θ et on pose :

$$T_n(cos\theta) = cos(n\theta)$$
$$T_n(X) = cos(n.arccosX)$$

appelés polynômes de TCHEBYCHEV de première espèce avec n entier positif.
Exemples pour les 3 premières valeurs de n :

$$\begin{cases} T_0(cos\theta) = 1;\ T_0(X) = 1 \\ T_1(cos\theta) = cos(\theta)\ ;\ T_1(X) = X \\ T_2(cos\theta) = cos(2\theta) = 2cos^2\theta - 1;\ T_2(X) = 2X^2 - 1 \end{cases}$$

3-1 (/4 pts)
En vous aidant de la somme des cosinus de $n\theta$ et de $(n-2)\theta$, en déduire l'expression de récurrence suivante :

$$\begin{cases} T_n(cos\theta) = 2cos\theta.T_{n-1}(cos\theta) - T_{n-2}(cos\theta) \\ n \geq 2 \end{cases}$$

Appliquer là pour donner explicitement les polynômes $T_n(X)$ pour $n = 3; 4; 5$.

3-2 (/2 pts)
Montrer que les fonctions $y(\theta) = \cos(n\theta)$ sont solutions de l'équation différentielle homogène suivante du second ordre à coefficients constants :

$$y"(\theta) + n^2 y(\theta) = 0$$

Question facultative, donne lieu à deux points bonus si les questions 3-1 et 3-2 sont entièrement faites et justes.
3-3 (/2 pts) :
On rappelle la *dérivation suivante* : $\frac{d(arccosX)}{dX} = \frac{-1}{\sqrt{1-X^2}}$ et le théorème de dérivation des fonctions composées : $(g(f(x))' = g'\big(f(x)\big).f'(x)$.

Calculer les dérivées *premières* et *secondes* des polynômes $T_n(X)$.

En déduire que les polynômes étudiés $T_n(X)$ de TCHEBYCHEV vérifient l'équation différentielle du second ordre :

$$(1 - X^2)T_n" - XT_n' + n^2 T_n = 0$$

Correction du DS de Maths I : test de niveau pour l'année 2021-2022
du 07 septembre 2021

/20 pts +/2pts bonus

1- Premier exercice (/8 pts) : nombres complexes, polynômes.

On donne le polynôme P suivant du *quatrième degré* dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = X^4 + 4X - 1$$

1-1 (/2 pts)

Donner le système de 4 équations à 4 inconnues réelles (a, b, c, d) à partir de l'identification, terme à terme, des 2 expressions du polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^4 + 4X - 1 = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$$

Commençons par développer le produit des deux facteurs du second degré et à les ordonner suivant les puissances décroissantes :

$$(X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d) = X^4 + X^3(a + c) + X^2(b + d + ac) + X(ad + bc) + bd$$

L'identification, terme à terme, conduit alors au système recherché de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d + ac = 0 \\ ad + bc = 4 \\ bd = -1 \end{cases}$$

1-2 (/4 pts =/4x1 pt). Résoudre dans $\mathbb{R}$ le *système précédent* pour trouver le quadruplet (a, b, c, d).

D'après l'énoncé, il faut remplacer les trois inconnues en fonction de la quatrième a, ainsi nous avons :

$$\begin{cases} c = -a \\ b + d = -ac = a^2 \\ a(d - b) = 4 \\ bd = -1 \end{cases} \to \begin{cases} c = -a \\ b + d = a^2 \\ d - b = \dfrac{4}{a} \\ bd = -1 \end{cases}$$

A partir des équations 2 et 3, il est possible de résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues, b et d tels que :

$$\begin{cases} d = \dfrac{1}{2}\left(a^2 + \dfrac{4}{a}\right) = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{2}{a} \\ b = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{2}{a} \end{cases}$$

D'après la quatrième équation du système principal, nous avons :

$$bd = \left(\frac{a^2}{2} - \frac{2}{a}\right)\left(\frac{a^2}{2} + \frac{2}{a}\right) = -1$$

Ou encore, en tenant compte de l'identité remarquable :

$$\frac{a^4}{4} - \frac{4}{a^2} = -1 \quad ou\ encore \quad a^6 - 16 = -4a^2$$

Et, en posant : $u = a^2$, il vient l'équation donnée dans l'énoncé : $u^3 + 4u - 16 = 0$ dont une racine évidente, donnée dans l'énoncé également, est : $u = 2 = a^2$.

Normalement, on a : $a = \mp\sqrt{2}$ mais on peut seulement choisir : $a = +\sqrt{2}$ car a et c jouent un rôle symétrique, de même b et d d'après leurs expressions.

En remplaçant, proche en proche, nous trouvons :

$$\begin{cases} a = +\sqrt{2} \\ b = 1 - \sqrt{2} \\ c = -\sqrt{2} \\ d = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \quad ou\ encore \quad \begin{cases} a' = -\sqrt{2} = c \\ b' = 1 + \sqrt{2} = d \\ c' = +\sqrt{2} = a \\ d' = 1 - \sqrt{2} = b \end{cases}$$

En déduire la factorisation proposée en donnant le quadruplet *sous sa forme radicale*.

$$X^4 + 4X - 1 = \left(X^2 + \sqrt{2}X + \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(X^2 - \sqrt{2}X + \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$$

1-3 (/2 pts)

Donner les 2 racines réelles sous leur forme radicale et calculer les numériquement, *vous trouverez* de façon approchée :

$$X_1 \cong 0{,}2490 \quad ; X_2 \cong -1{,}6633$$

S'il existe deux racines réelles, c'est qu'un des deux facteurs doit avoir son discriminant positif, il est aisé de voir que c'est ici le premier facteur :

$$\Delta_1 = 2 - 4\left(1 - \sqrt{2}\right) = -2 + 4\sqrt{2}$$

Les deux racines s'écrivent donc :

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2} = \dfrac{-1{,}4142 + 1{,}9123}{2} \cong 0{,}2490 \\ X_2 = \dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2} = \dfrac{-1{,}4142 - 1{,}9123}{2} \cong -1{,}6633 \end{cases}$$

Démontrer (sans les calculer) que les deux autres racines constituent une *paire complexe conjuguée*.

Le discriminant du deuxième facteur se calcule de la façon suivante :

$$\Delta_1 = 2 - 4\left(1 + \sqrt{2}\right) = -2 - 4\sqrt{2} < 0$$

Comme il est négatif, nous avons donc une *paire complexe conjuguée* comme racines de ce polynôme.

2- (/6 pts). Deuxième exercice : nombres complexes, primitives, fractions rationnelles

2-1 (/3 pts)

On pose : $t = Arctan(z)$, en vous aidant des formules d'EULER appliquées à $\tan(t)$, en déduire, après calculs que vous donnerez, l'expression recherchée :

$$t = Arctan(z) \rightarrow \tan(t) = z = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right).\left(\frac{2}{e^{it} + e^{-it}}\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{e^{it} + e^{-it}}\right)$$

Ou encore, en multipliant par une exponentielle complexe bien choisie :

$$z = \tan(t) = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{2it} - 1}{e^{2it} + 1}\right)$$

De cette expression, nous allons en déduire : e^{2it} en fonction de $\tan(t)$ que nous remplacerons par z, soit :

$$e^{2it} - 1 = i.z.\left(e^{2it} + 1\right)$$

Ou encore :

$$e^{2it}(1 - iz) = 1 + iz \rightarrow e^{2it} = \frac{1 + iz}{1 - iz} \rightarrow 2it = ln\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$$

Et par conséquent,

$$\boxed{t = Arctan(z) = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \frac{1}{i} ln\left\{\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{1/2}\right\}}$$

2-2 (/3 pts)

En appliquant le résultat portant sur une primitive de la fonction $h: z \to \frac{1}{1+z^2}$

$$Arctan(z) = \int \frac{dz}{1+z^2} - C; C \in \mathbb{R}$$

Effectuer une décomposition en éléments simples (DES) dans $\mathbb{C}[X]$ de $h(z)$.

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = Arctan(z) + C \to Arctan(z) = \int \frac{dz}{1+z^2} - C; C \in \mathbb{R}$$

Commençons par décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ la fonction $h(z)$:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-i^2z^2} = \frac{1}{1-(iz)^2} = \frac{A}{1+iz} + \frac{B}{1-iz} = \frac{(A+B)+iz(B-A)}{1+z^2}$$

Et, par identification des expressions du numérateur :

$$\begin{cases} B+A=1 \\ B-A=0 \end{cases} \to \begin{cases} 2B=1 \\ A=B \end{cases} \to \begin{cases} A=1/2 \\ B=1/2 \end{cases}$$

Il vient après la DES dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+iz} + \frac{1}{1-iz}\right)$$

En revenant au calcul de départ :

$$Arctan(z) = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+iz} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1-iz} + C = \frac{1}{2i} ln(1+iz) - \frac{1}{2i} ln(1-iz) = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

On retrouve formellement les mêmes expressions, la constante est 0 pour $z = 0$.

3- (/6 pts). Troisième exercice : fonctions trigonométriques, polynômes

On s'intéresse aux expressions des cosinus linéaires de l'angle θ et on pose :

$$T_n(cos\theta) = cos(n\theta)$$
$$T_n(X) = cos(n.arccosX)$$

3-1 (/4 pts)

En vous aidant de la somme des cosinus de $n\theta$ et de $(n-2)\theta$, en déduire l'expression de récurrence suivante :

$$\begin{cases} T_n(cos\theta) = 2cos\theta.T_{n-1}(cos\theta) - T_{n-2}(cos\theta) \\ n \geq 2 \end{cases}$$

Rappels :

On va chercher l'expression de la somme de deux cosinus à partir des relations suivantes que l'on connaît par cœur :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b \end{cases}$$

En faisant la somme des deux cosinus, il vient :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a . \cos b$$

Et enfin, en posant :

$$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases} ou \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

Nous en déduisons l'expression de la somme de deux cosinus :

$$\boxed{\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

En posant : $p = n\theta; q = (n-2)\theta$, il vient :

$$\frac{p+q}{2} = \frac{n\theta + (n-2)\theta}{2} = (n-1)\theta \; ; \; \frac{p-q}{2} = \frac{n\theta - (n-2)\theta}{2} = \theta$$

En remplaçant, nous obtenons :

$$\cos(n\theta) + \cos\big((n-2)\theta\big) = 2\cos\big((n-1)\theta\big).\cos(\theta)$$

Ce qui conduit à la relation demandée :

$$\boxed{\begin{cases} T_n(cos\theta) = 2cos\theta.T_{n-1}(cos\theta) - T_{n-2}(cos\theta) \\ n \geq 2 \end{cases}}$$

Appliquer là pour donner explicitement les polynômes $T_n(X)$ pour $n = 3; 4; 5$.

$$\begin{cases} T_0(cos\theta) = 1;\; T_0(X) = 1 \\ T_1(cos\theta) = cos(\theta)\; ;\; T_1(X) = X \\ T_2(cos\theta) = cos(2\theta) = 2cos^2\theta - 1;\; T_2(X) = 2X^2 - 1 \end{cases}$$

Calcul de : $T_3(cos\theta) = cos(3\theta)$

$$T_3(cos\theta) = 2cos\theta.T_2(cos\theta) - T_1(cos\theta)$$

Ou encore :

$$cos(3\theta) = 2cos\theta.(2cos^2\theta - 1) - cos(\theta)$$

Apres simplifications :

$$\boxed{\begin{cases} cos(3\theta) = 4cos^3\theta - 3cos\theta \\ T_3(X) = 4X^3 - 3X \end{cases}}$$

Calcul de : $T_4(cos\theta) = cos(4\theta)$

$$T_4(cos\theta) = 2cos\theta.T_3(cos\theta) - T_2(cos\theta)$$

Ou encore :

$$cos(4\theta) = 2cos\theta.(4cos^3\theta - 3cos\theta) - (2cos^2\theta - 1) = 8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1$$

Apres simplifications :

$$\boxed{\begin{cases} cos(4\theta) = 8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1 \\ T_4(X) = 8X^4 - 3X^2 + 1 \end{cases}}$$

Calcul de : $T_5(cos\theta) = cos(5\theta)$

$$T_5(cos\theta) = 2cos\theta.T_4(cos\theta) - T_3(cos\theta)$$

Ou encore :

$$cos(4\theta) = 2cos\theta.(8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1) - (4cos^3\theta - 3cos\theta)$$
$$= 16cos^5\theta - 20cos^3\theta + 5cos\theta$$

Apres simplifications :

$$\boxed{\begin{cases} cos(5\theta) = 16cos^5\theta - 20cos^3\theta + 5cos\theta \\ T_5(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X \end{cases}}$$

3-2 (/2 pts)

Montrer que les fonctions $y(\theta) = \cos(n\theta)$ sont solutions de l'équation différentielle homogène suivante du second ordre à coefficients constants

$$y'(\theta) = -n.sin(n\theta)$$

Et en dérivant encore :$y''(\theta) = -n^2.\cos(n\theta) = -n^2.y(\theta)$.

L'équation différentielle est ainsi obtenue :

$$\boxed{y''(\theta) + n^2.y(\theta) = 0}$$

06 Septembre 2022 – Test de niveau en Mathématiques
Grenoble INP – Pagora - 3FMT3065 - 1ère année : 1E, 1A
Tous documents autorisés, dispositifs électroniques interdits – Durée : 1h30

Sujet composé de 3 exercices qui portent sur 4 chapitres sur 6 du cours de Mathématiques I : nombres complexes, polynômes, fractions rationnelles, primitives.

1- (/4,5 pts). Premier exercice : nombres complexes, polynômes.

On donne le polynôme P suivant du *quatrième degré* dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = X^4 + 1$$

1-1 (/2,5 pts) – Recherche des racines complexes

Donner les quatre *racines complexes* de l'équation suivante : $z^4 + 1 = 0$ en précisant leur *argument principal*. Chercher les racines de l'équation sous la forme :

$$z_k = \rho_k . e^{i\varphi_k};\ \rho_k > 0;\ \varphi_k \in]-\pi, \pi] \quad ; k \in \{0,1,2,3\}$$

1-2 (/2 pts) - Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

A partir de la question précédente, en regroupant les couples de racines complexes conjuguées, en déduire la factorisation du polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$.

En vous inspirant du développement du carré suivant : $(X^2 + 1)^2$, retrouver la factorisation précédente du polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$.

2- (/6 pts). Deuxième exercice : fraction rationnelle et DES

2-1 (/2 pts) – Forme générale de la DES dans $\mathbb{R}[X]$

Au premier exercice, nous avons trouvé que le polynôme P pouvait s'écrire dans $\mathbb{R}[X]$ comme le produit de deux polynômes du second degré, à discriminant négatif.

Donner la forme générale de la *décomposition en éléments simples* (DES) dans $\mathbb{R}[X]$ de la fraction rationnelle suivante :

$$F = \frac{2X^2}{X^4 + 1}$$

On associera le couple de réels (A, B) au polynôme du second degré possédant un *coefficient négatif*, l'autre couple de réels sera noté (C, D).

2-2 (/4 pts) – Calcul de la DES dans $\mathbb{R}[X]$

Il reste donc un quadruplet de coefficients réels à déterminer, soit (A, B, C, D).

En vous aidant, éventuellement, de *propriétés mathématiques* de la fraction rationnelle F, calculer sa DES, c'est-à-dire : donner les valeurs numériques des coefficients du quadruplet, soit (A, B, C, D).

3- (/9,5 pts). Troisième exercice : calcul d'une primitive

On se propose de calculer dans $\mathbb{R}$ une primitive telle que :

$$I = \int \sqrt{tan(x)}.\, dx$$

3-1 (/2 pts)

Donner, en le justifiant, le *domaine de définition* dans $\mathbb{R}$, rendant possible ce calcul.

3-2 (/2 pts)
Ayant opté pour le *changement de variable* qui s'impose naturellement : $u = \sqrt{tan(x)}$, donner la nouvelle expression permettant le calcul de I.
On rappelle, à toutes fins utiles, la dérivée suivante : $\frac{d}{dx}[tan(x)] = 1 + tan^2(x)$
Vous trouverez le résultat suivant :

$$I = \int F(u)du$$

Avec F la fraction rationnelle dans $\mathbb{R}[X]$ étudiée au deuxième exercice.

3-3 (/5,5 pts) :
A partir de la DES de F, il a été possible d'obtenir deux expressions distinctes.
Calculer séparément la primitive de chacune des expressions en précisant toutes les étapes des calculs.

Vous obtiendrez le résultat suivant, après *regroupement partiel* des termes :

$$I = \frac{\sqrt{2}}{4} ln\left[\frac{tan(x) - \sqrt{2.tan(x)} + 1}{tan(x) + \sqrt{2.tan(x)} + 1}\right] + \frac{\sqrt{2}}{2} Arctan\left(\sqrt{2.tan(x)} - 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} Arctan\left(\sqrt{2.tan(x)} + 1\right) + cte$$

Correction du DS Test de Maths I : test de niveau pour l'année 2022-2023
du 06 septembre 2022

1- Premier exercice (/4,5 pts) : nombres complexes, polynômes.

On donne le polynôme P suivant du *quatrième degré* dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = X^4 + 1$$

1-1 (/2,5 pts) – Recherche des racines complexes

Donner les quatre *racines complexes* de l'équation suivante : $z^4 + 1 = 0$ en précisant leur *argument principal*. Chercher les racines de l'équation sous la forme :

$$z_k = \rho_k . e^{i\varphi_k};\ \rho_k > 0;\ \varphi_k \in]-\pi, \pi]\ \ ; k \in \{0,1,2,3\}$$

Commençons par remplacer z_k par son expression donnée dans l'énoncé, il vient :

$$\left(\rho_k . e^{i\varphi_k}\right)^4 = -1 = 1. e^{i(\pi+2k\pi)} = (\rho_k)^4 . e^{i4\varphi_k}$$

Ou encore, en égalant les modules et arguments, nous obtenons : (2 pts = 4x0,5 pt)

$$\boxed{\begin{cases} \rho_k = 1 \\ \varphi_k = (2k+1)\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \quad \forall k \in \{0,1,2,3\}}$$

Pour les arguments, il vient :

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4};\ \ \varphi_1 = \frac{3\pi}{4};\ \ \varphi_2 = \frac{5\pi}{4};\ \varphi_3 = \frac{7\pi}{4}$$

Les deux premiers arguments sont principaux, car appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Pour les deux autres, quelques manipulations sont nécessaires :

$$z_2 = exp\left(i\frac{5\pi}{4}\right) = \exp\left(i\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{8\pi}{4}\right)\right) = exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right) = \overline{z_1}$$

De même :

$$z_3 = exp\left(i\frac{7\pi}{4}\right) = \exp\left(i\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{8\pi}{4}\right)\right) = exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) = \overline{z_0}$$

En résumé, nous obtenons : (+0,5 pt pour l'argument principal)

$$\boxed{\boldsymbol{z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}};\ \ z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}};\ z_2 = \overline{z_1} = \ e^{-i\frac{3\pi}{4}};\ z_3 = \overline{z_0} = e^{-i\frac{\pi}{4}}}}$$

1-2 (/2 pts) - Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

A partir de la question précédente, en regroupant les couples de racines complexes conjuguées, en déduire la factorisation du polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$.

Les paires complexes conjuguées sont les suivantes :

$$(z_0;\ z_3 = \overline{z_0});\ (z_1;\ z_2 = \overline{z_1})$$

Si le polynôme P a 4 racines complexes, alors on peut l'écrire sous la forme suivante avec un coefficient unitaire pour le coefficient associé au plus grand exposant de X : (0,5 pt)

$$P = (X - z_0)(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = (X - z_0)(X - \overline{z_0})(X - z_1)(X - \overline{z_1})$$

On applique le résultat de cours pour obtenir une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ cette fois :

$$\left[X - \rho e^{i\varphi}\right]\left[X - \rho e^{-i\varphi}\right] = X^2 - 2\rho cos\varphi . X + \rho^2$$

Lorsque le module vaut 1, la factorisation devient :

$$\left[X - e^{i\varphi}\right]\left[X - e^{-i\varphi}\right] = X^2 - 2cos\varphi . X + 1$$

Ce qui est notre cas : $cos(\varphi_0) = \frac{\sqrt{2}}{2};\ cos(\varphi_1) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, d'où il vient : (1 pt = 2x0,5 pt)

$$\boldsymbol{P = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)}$$

En vous inspirant du développement du carré suivant : $(X^2 + 1)^2$, retrouver la factorisation précédente du polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$.

$$(X^2 + 1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1 = P + 2X^2$$

D'où l'on peut extraire P : (0,5 pt)

$$P = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 + 1)^2 - \left(\sqrt{2}.X\right)^2 = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$$

2- (/6 pts). Deuxième exercice : fraction rationnelle et DES

2-1 **(/2 pts)** – Forme générale de la DES dans $\mathbb{R}[X]$

Au premier exercice, nous avons trouvé que le polynôme P pouvait s'écrire dans $\mathbb{R}[X]$ comme le produit de deux polynômes du second degré, à discriminant négatif.

<u>Donner</u> la forme générale de la *décomposition en éléments simples* (DES) dans $\mathbb{R}[X]$ de la fraction rationnelle suivante :

$$F = \frac{2X^2}{X^4+1}$$

On associera le couple de réels (A, B) au polynôme du second degré possédant un *coefficient négatif*, l'autre couple de réels sera noté (C, D).

Rappelons la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$$

Le discriminant est bien négatif et est identique pour les deux facteurs du second degré :

$$\Delta = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 = 2 - 4 = -2 < 0$$

La DES est celle d'éléments simples dits de deuxième espèce, soit : (2 pts = 2x1 pt)

$$F = \frac{2X^2}{X^4+1} = \frac{2X^2}{\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)} = \frac{AX+B}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{CX+D}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}$$

Polynôme dénominateur de degré 4 impliquant 4 coefficients réels à déterminer.

2-2 **(/4 pts)** – Calcul de la DES dans $\mathbb{R}[X]$

Il reste donc un quadruplet de coefficients réels à déterminer, soit (A, B, C, D).

<u>En vous aidant</u>, éventuellement, de *propriétés mathématiques* de la fraction rationnelle F, <u>calculer</u> sa DES, c'est-à-dire : <u>donner</u> les valeurs numériques des coefficients du quadruplet, soit (A, B, C, D).

D'après la forme de la fraction rationnelle, on voit qu'elle est paire :

$$F(-X) = F(X)$$

$$\frac{-AX+B}{X^2 + \sqrt{2}X + 1} + \frac{-CX+D}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} = \frac{AX+B}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{CX+D}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}$$

Comme la DES est unique, il vient alors deux relations entre les 4 coefficients, soit :

$$\begin{cases} C = -A \\ D = B \end{cases}$$

L'écriture de la fraction devient, après simplifications et mise au même dénominateur :

$$F = \frac{2X^2}{X^4+1} = \frac{AX+B}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{-AX+B}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}$$
$$= \frac{(AX+B)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right) + (-AX+B)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)}{X^4+1}$$

Commençons par le produit des deux facteurs affublés de coefficients positifs :

$$(AX+B)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right) = AX^3 + \left(B + A\sqrt{2}\right)X^2 + \left(A + B\sqrt{2}\right)X + B$$

Pour l'autre produit, il vient :

$$(-AX+B)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right) = -AX^3 + \left(B + A\sqrt{2}\right)X^2 + \left(-A - B\sqrt{2}\right)X + B$$

En ajoutant les deux expressions, les termes en puissances impaires disparaissent, il vient :

$$(AX+B)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right) + (-AX+B)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right) = 2\left(B + A\sqrt{2}\right)X^2 + 2B = 2X^2 + 0$$

De suite, nous avons par identification des coefficients des termes de même degré : (4x1 pt)

$$\begin{cases} 2B = 0 \\ 2A\sqrt{2} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ 4A = 2\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F = \frac{2X^2}{X^4+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}X}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}X}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}}$$

3- <u>**(/9,5 pts)**. Troisième exercice : calcul d'une primitive</u>

On se propose de calculer dans $\mathbb{R}$ une primitive telle que :

$$I = \int \sqrt{tan(x)}.dx$$

3-1 **(/2 pts)**

Donner, en le justifiant, le *domaine de définition* dans ℝ, rendant possible ce calcul.

Le domaine de définition cherché est tel que l'expression sous le radical soit positive, ce qui donne, comme intervalles possibles :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[ou \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi; (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$$

3-2 **(/2 pts)**

Ayant opté pour le *changement de variable* qui s'impose naturellement : $u = \sqrt{tan(x)}$, donner la nouvelle expression permettant le calcul de I.

On rappelle, à toutes fins utiles, la dérivée suivante : $\frac{d}{dx}[tan(x)] = 1 + tan^2(x)$

Prenons la différentielle de l'expression donnant le changement de variable :

$$u = \sqrt{tan(x)} \to du = \frac{\frac{d}{dx}[tan(x)]}{2\sqrt{tan(x)}}dx = \frac{1 + tan^2(x)}{2\sqrt{tan(x)}}dx$$

Ou encore, en sortant dx et en le remplaçant par les expressions déduites : (1 pt)

$$dx = \frac{2\sqrt{tan(x)}}{1 + tan^2(x)}du = \frac{2u}{1+u^4}du$$

En remplaçant maintenant dans I, il vient : (1 pt)

$$I = \int \sqrt{tan(x)}.dx = \int u\frac{2u}{1+u^4}du = \int \frac{2u^2}{1+u^4}du = \int F(u)du$$

Dans laquelle F désigne la fraction rationnelle préalablement étudiée au deuxième exercice.

3-3 **(/5,5 pts)**

A partir de la DES de F, il a été possible d'obtenir deux expressions distinctes.

Calculer séparément la primitive de chacune des expressions en précisant toutes les étapes des calculs.

$$F(X) = \frac{AX+B}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{CX+D}{X^2+\sqrt{2}X+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}X}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}X}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}$$

Le calcul d'une primitive I se décompose de la façon suivante : (1 pt)

$$I = \int F(u)du = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1}du + \int \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}du = I_1 + I_2$$

Calcul de I_1 :

On va étudier et calculer chacune des primitives, en commençant par I_1 :

Posons :

$$f_1(u) = u^2 - \sqrt{2}u + 1 \to f_1'(u) = 2u - \sqrt{2}$$

On va faire apparaître la dérivée au numérateur, avec les bons coefficients numériques :

$$I_1 = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1}du = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{(2u - \sqrt{2} + \sqrt{2})}{u^2 - \sqrt{2}u + 1}du = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{f_1'(u)}{f_1(u)}du + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 - \sqrt{2}u + 1}$$

Le premier terme est une primitive connue, pour le deuxième, il faut faire apparaître l'expression d'un carré :

$$f_1(u) = u^2 - \sqrt{2}u + 1 = \left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{2}{4} + 1 = \left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left[1 + \left\{\frac{2}{\sqrt{2}}\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}^2\right] = \frac{1}{2}[1 + v^2]$$

Avec le changement de variable suivant :

$$v=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}u-1\rightarrow dv=\sqrt{2}du$$

En reprenant les deux termes de I_1, il vient : (2pts = 2x1pt)

$$I_1=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}u}{u^2-\sqrt{2}u+1}du=\frac{\sqrt{2}}{4}ln\left|u^2-\sqrt{2}u+1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2-\sqrt{2}u+1}$$

Ou encore :

$$I_1=\frac{\sqrt{2}}{4}ln\left(u^2-\sqrt{2}u+1\right)+\frac{1}{2}\int\frac{\frac{dv}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}[1+v^2]}=\frac{\sqrt{2}}{4}ln\left(u^2-\sqrt{2}u+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}Arctan\left(\sqrt{2}u-1\right)$$

<u>Calcul de I_2 (2,5 pts)</u>

Les calculs se conduisent de façon identique :

$$I_2=\int\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}u}{u^2+\sqrt{2}u+1}du$$

Posons :

$$f_2(u)=u^2+\sqrt{2}u+1\rightarrow f_1'(u)=2u+\sqrt{2}$$

On va faire apparaître la dérivée au numérateur, avec les bons coefficients numériques :

$$I_2=\int\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}u}{u^2+\sqrt{2}u+1}du=\frac{-\sqrt{2}}{4}\int\frac{\left(2u+\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)}{u^2+\sqrt{2}u+1}du=\frac{-\sqrt{2}}{4}\int\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}du+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+\sqrt{2}u+1}$$

$$f_2(u)=u^2+\sqrt{2}u+1=\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{2}{4}+1=\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left[1+\left\{\frac{2}{\sqrt{2}}\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}^2\right]=\frac{1}{2}[1+w^2]$$

Avec le changement de variable suivant :

$$w=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}u+1\rightarrow dw=\sqrt{2}du$$

En reprenant les deux termes de I_1, il vient :

$$I_2=\int\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}u}{u^2+\sqrt{2}u+1}du=\frac{-\sqrt{2}}{4}ln\left|u^2+\sqrt{2}u+1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+\sqrt{2}u+1}$$

Ou encore :

$$I_2=\frac{-\sqrt{2}}{4}ln\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right)+\frac{1}{2}\int\frac{\frac{dw}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}[1+w^2]}=\frac{-\sqrt{2}}{4}ln\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}Arctan\left(\sqrt{2}u+1\right)$$

En rassemblant les deux termes, nous obtenons :

$$I=I_1+I_2=\frac{\sqrt{2}}{4}ln\left(u^2-\sqrt{2}u+1\right)+\frac{-\sqrt{2}}{4}ln\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}Arctan\left(\sqrt{2}u-1\right)$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{2}Arctan\left(\sqrt{2}u+1\right)$$

Après avoir regroupé les logarithmes et avoir remplacé la variable u par la variable x, nous obtenons l'expression donnée dans l'énoncé, à savoir :

$$I=\frac{\sqrt{2}}{4}ln\left|\frac{tan(x)-\sqrt{2.tan(x)}+1}{tan(x)+\sqrt{2.tan(x)}+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{2}Arctan\left(\sqrt{2.tan(x)}-1\right)$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{2}Arctan\left(\sqrt{2.tan(x)}+1\right)+cte$$