Pagora - 1 CFA 2025-2026

Maths 1- Recueil d'exercices

Chapitre I :

Calcul de primitives (niveau 1)

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les technique de calcul de primitives des fonctions usuelles. Ces calculs ne nécessiteront pas de techniques "évoluées", c'est à dire la décomposition en éléments simples, l'intégration par parties ou le changement de variables, que nous verrons dans un deuxième temps.
Le calcul de primitives est utilisé pour résoudre des équations différentielles.

- Une primitive de f est une fonction F telle que $F' = f$.
- Toute fonction continue f admet une primitive.
- Si F est une primitive de f, alors toutes les primitives de f s'écrivent $F + constante$
- Une primitive de $f(x)$ se note $\int_a^x f(t)dt$, où a est une valeur quelconque de D_f.

  Par **abus de notation** on note souvent une primitive sous la forme $\int f(x)dx$
- Primitives usuelles à connaitre par coeur :

Fonctions	Primitives (C constante réele)
$x^a \quad (a \in \mathbb{R},\ a \neq -1)$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\cos(\alpha x) \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + C$
$\sin(\alpha x) \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$-\dfrac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + C$
$\dfrac{1}{(x+a)}$	$\ln(\|x+a\|) + C$
$\dfrac{1}{(x+a)^\alpha} \quad (\alpha \neq 1)$	$\dfrac{-1}{(\alpha-1)(x+a)^{\alpha-1}} + C$
$e^{\alpha x} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C$
$ln(x)$	$xln(x) - x + C$

Exercice 1

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes sur un intervalle bien choisi :

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = e^{4x} & f_2(x) = 3x^4 - \dfrac{x^2}{5} + 1 & f_3(x) = \sin(2x) \\ f_4(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) & f_5(x) = ln(5x) & f_6(x) = \dfrac{3}{x+2}. \end{array}$$

Exercice 2

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes sur un intervalle bien choisi :

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = \sqrt{x} & f_2(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} & f_3(x) = \dfrac{1}{(x+3)^3} \\ f_4(x) = \sqrt{5x} & f_5(x) = 3^x & f_6(x) = \dfrac{1}{2x+3} \end{array}$$

Elements de corrections

Correction Ex 1

1. $I = \mathbb{R}$ et les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{4}e^{4x} + C$ où $C \in \mathbb{R}$
2. $I = \mathbb{R}$ et les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{3}{5}x^5 - \dfrac{x^3}{15} + x + C$ où $C \in \mathbb{R}$
3. $I = \mathbb{R}$ et les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$
4. $I = \mathbb{R}$ et les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{3}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) + C$ où $C \in \mathbb{R}$
5. $I = \mathbb{R}^{+*}$ et les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto xln(5x) - x + C$ où $C \in \mathbb{R}$
6. $I =]-2; +\infty[$ et les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto 3ln(|x+2|) + C$ où $C \in \mathbb{R}$

Correction Ex 2

1. $I = \mathbb{R}^{+}$ et les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ où $C \in \mathbb{R}$
2. $I = \mathbb{R}^{+*}$ et les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto -2x^{-\frac{1}{2}} + C$ où $C \in \mathbb{R}$
3. $I =]-3; +\infty[$ et les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{-1}{2(x+3)^2} + C$ où $C \in \mathbb{R}$
4. $I = \mathbb{R}^{+}$ et les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{2\sqrt{5}}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ où $C \in \mathbb{R}$
5. $I = \mathbb{R}$ et les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{3^x}{ln(3)} + C$ où $C \in \mathbb{R}$
6. $I =]-\dfrac{3}{2}; +\infty[$ et les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{2}ln(|x + \dfrac{3}{2}|) + C$ où $C \in \mathbb{R}$

Chapitre II :

Equations différentielles linéaires (partie 1)

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les techniques élémentaires de résolution des équations différentielles, l'objectif étant que vous puissiez être à l'aise immédiatement dans les autres de première année (chimie, électrotechnique, ...) Dans un premier temps, ces calculs ne nécessiteront pas de techniques "évoluées", comme le recollement de solutions ou la mise sous forme matricielle. Nous verrons ces techniques à la fin du semestre.

- Une ***équation différentielle linéaire du premier ordre*** est une équation de la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad (EC)$$

  où a et b sont des fonctions **continues** sur un intervalle I. On la note (EC) comme "équation complète".
- On appelle ***équation homogène*** associée à (EC) l'équation notée (EH) définie par

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \qquad (EH)$$

- la fonction b est appelée ***second membre de l'équation*** (EC).
- Pour résoudre une telle équation, on doit ajouter toutes les solutions de (EH) + une solution particulière de (EC).
- Toutes les solutions de (EH) sont de la forme $Ce^{-A(x)}$ avec C constante réelle, où A est une ***primitive*** de a sur I.
- Pour chercher une solution particulière y_p de (EC), on peut chercher une solution évidente ou utiliser la **variation de la constante** : on cherche la sp sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{-A(x)}$, où $K(x)$ est à déterminer en remplaçant y_p dans l'équation (EC).
- on peut utiliser pour trouver y_p le **principe de superposition**

Exercice 3

Équations du premier ordre
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
2. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$;
3. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
4. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
5. $y' - \dfrac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$.

- Une ***équation différentielle linéaire du second ordre*** est une équation de la forme

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x) \qquad (EC)$$

où $a(x), b(x), c(x)$ et $d(x)$ sont des fonctions **continues** sur un intervalle I. On la note (EC) comme "équation complète".
- Si a, b, c ne dépendent pas de x, no dit que l'équation est à **coefficients constants.** Ce sont ces équations qu'on étudiera dans la suite.
- On appelle ***équation homogène*** associée à (EC) l'équation notée (EH) définie par

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \qquad (EH)$$

- la fonction d est appelée ***second membre de l'équation*** (EC).
- Pour résoudre une telle équation, on doit ajouter toutes les solutions de (EH) + une solution particulière de (EC).
- Pour trouver $\mathcal{S}_H$, l'ensemble des solutions de (EH) :
On forme l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, on la résout, il y a 3 cas :
  - Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de $(\star)$, et on a

$$\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

  - Si $\Delta < 0$, on note $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ les deux racines complexes conjuguées distinctes de $(\star)$, et on a

$$\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right) \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

  - Si $\Delta = 0$, on note r la racine réelle double de $(\star)$, et on a

$$\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto (Ax + B)\mathrm{e}^{rx} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Pour chercher une solution particulière y_p de (EC), on peut chercher une solution évidente ou regarder les cas suivants :
  - **si** $d = P$ est une fonction polynomiale :
on cherche une solution particulière Q où Q est une fonction polynomiale de degré à définir
  - **si** $d(x) = P(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ **où** P **est une fonction polynomiale et** $\lambda \in \mathbb{K}$:
on cherche une solution particulière sous la forme $Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ où Q est une fonction polynomiale de degré à définir.
  - **si** $d(x) = P(x)\mathrm{e}^{\lambda x}cos(\alpha x)$ **où** P **est une fonction polynomiale et** $\lambda \in \mathbb{K}$: on cherche une solution particulière sous la forme $Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}cos(\alpha x) + R(x)\mathrm{e}^{\lambda x}sin(\alpha x)$ où Q et R sont des fonctions polynomiales.
- on peut utiliser pour trouver y_p le **principe de superposition**
- La **variation de la constante** est difficile à mettre en oeuvre (nécessite l'usage de matrices)

Exercice 4

Équations du second ordre à coefficients constants
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$;
2. $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$;
3. $y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos x$;
4. $y'' - 2y' + 5y = -4xe^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin x - 4e^x\sin(2x)$;

Exercice 5

On cherche à résoudre l'équation $y' + 3xy = 6x^2 + 3$, on a demandé son aide à ChatGPT, comme en témoignent les captures d'écran ci après.

1. Le résultat final proposé est il correct ?
2. Tenter de faire les calculs par vous même.

résout l'équation $y'+3xy=6x^2+3$

L'équation différentielle donnée est :

$$y' + 3xy = 6x^2 + 3$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme standard :

$$y' + p(x)y = q(x)$$

où $p(x) = 3x$ et $q(x) = 6x^2 + 3$.

La méthode de résolution consiste à utiliser un facteur intégrant. Le facteur intégrant $\mu(x)$ est donné par :

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

Calculons ce facteur intégrant. Comme $p(x) = 3x$, on a :

$$\mu(x) = e^{\int 3x\,dx} = e^{\frac{3x^2}{2}}$$

Ensuite, on multiplie toute l'équation par ce facteur intégrant :

$$e^{\frac{3x^2}{2}}y' + 3xe^{\frac{3x^2}{2}}y = (6x^2 + 3)e^{\frac{3x^2}{2}}$$

Le membre de gauche de cette équation est la dérivée de $e^{\frac{3x^2}{2}}y$ par rapport à x :

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{3x^2}{2}}y\right) = (6x^2 + 3)e^{\frac{3x^2}{2}}$$

En intégrant les deux côtés par rapport à x, on obtie

$$e^{\frac{3x^2}{2}}y = \int (6x^2+3)e^{\frac{3x^2}{2}}\, dx$$

Pour résoudre cette intégrale, on décompose $(6x^2+3)$ en deux parties :

$$\int (6x^2+3)e^{\frac{3x^2}{2}}\, dx = \int 6x^2 e^{\frac{3x^2}{2}}\, dx + \int 3e^{\frac{3x^2}{2}}\, dx$$

Utilisons la substitution $u = \frac{3x^2}{2}$, ce qui donne $du = 3x\, dx$, pour résoudre ces intégrales. Le premier terme s'intègre directement, et le second terme aussi. En effectuant les intégrations, on trouve finalement :

$$e^{\frac{3x^2}{2}}y = 2e^{\frac{3x^2}{2}} + C$$

où C est une constante d'intégration. En divisant par $e^{\frac{3x^2}{2}}$, on obtient :

$$y = 2 + Ce^{-\frac{3x^2}{2}}$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$y = 2 + Ce^{-\frac{3x^2}{2}}$$

où C est une constante arbitraire déterminée par les conditions initiales.

Elements de corrections

Correction Ex 3

1. Les solutions sont de la forme $y(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. la SGH est $y(x) = Ke^{2x}$, on peut chercher la SPC sous la même forme que le second membre, ie $Acos(x) + Bsin(x)$. On trouve $y_p(x) = -\frac{4}{5}cos(x) - \frac{3}{5}sin(x)$.
3. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h(x) = ke^{-x}$. Ensuite, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{-x}$. Ce qui donne $K'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x}$ et donc $K'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. Une solution particulière est $y_p(x) = \ln(e^x + 1)e^{-x}$. Les solutions générales sont de la forme $y(x) = ke^{-x} + \ln(e^x + 1)e^{-x}$
4. Les solutions générales sont les fonctions $x \mapsto kx + \frac{x^3}{2}$
5. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h(t) = kt^2$. Ensuite, il suffit de voir que $t \mapsto t^3$ est une solution particulière. Les solutions générales sont $t \mapsto t^3 + kt^2$.

Correction Ex 4

1. Ici 1 est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme $Q(x)e^{\alpha x}$ où Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 : $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Par identification on trouve $a = -\frac{1}{2}, b = -1$ et $c = 0$. Les solutions générales de l'équation avec second membre sont $x \mapsto -(\frac{x^2}{2} + x)e^x + k_1e^x + k_2e^{3x}$.
2. L'équation caractéristique $X^2 - 2X + 1 = 0$ admet 1 comme racine double. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $(Ax+B)e^x$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation générale en utilisant le principe de superposition des solutions. Enfin, les solutions générales de l'équation de départ sont $x \mapsto (\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + Ax + B)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}$
3. Utiliser le principe de superposition : chercher une solution « particulière » de $y'' - 4y' + 3y = x^2e^x$ puis une solution « particulière » de $y'' - 4y' + 3y = xe^{(2+i)x}$ et en prendre la partie réelle.
   En effet $2 + i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique donc on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = (ax + b)e^{(2+i)x}$. On a alors $y_p'(x) = ae^{(2+i)x} + (2 + i)(ax + b)e^{(2+i)x} = ae^{(2+i)x} + (2 + i)y_p(x)$ et $y''(x) = a(2 + i)e^{(2+i)x} + (2 + i)y_p'(x) = 2a(2 + i)e^{(2+i)x} + (3 + 4i)y_p(x)$. On alors $y_p'' - 4y_p' + 3y_p = 2a(2 + i)e^{(2+i)x} + (3 + 4i)y_p - 4ae^{(2+i)x} - 4(2 + i)y_p + 3y_p = 2aie^{(2+i)x} - 2y_p$.
   En injectant dans l'équation, on a : $(-2ax + 2ai - 2b)e^{(2+i)x} = xe^{(2+i)x}$. Ceci implique que $-2a = 1$ et $2ai - 2b = 0$. D'où $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{i}{2}$. Une solution particulière est donc $y_p(x) = (-\frac{1}{2}x - \frac{i}{2})e^{(2+i)x} = e^{2x}(-\frac{1}{2}x - \frac{i}{2})(\cos(x) + i\sin(x) = e^{2x}(-\frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{i}{2}(x\sin(x) + \cos(x)))$. En prenant la partie réelle on déduit une solution particulière de l'équation $y'' - 4y' + 3y = xe^{(2+i)x}$ qui est $y_p(x) = (-\frac{x}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x))e^{2x}$.

   Les solutions générales de l'équation de départ sont
   $$x \mapsto -(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x)e^x + (-\frac{x}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x))e^{2x} + k_1e^x + k_2e^{3x}$$
4. L'équation caractéristique $X^2 - 2X + 5$ admet pour racines $1 + 2i$ et $1 - 2i$. Ensuite, on utilise le principe de superposition. Les deux premiers termes peuvent être traités ensemble comme ils ont comme facteur commun e^x. On résout donc $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x)$ puis $y'' - 2y' + 5y = -4e^{(1+2i)x}$ et on prend la partie imaginaire.
   Concernant la première équation, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = e^{-x}(a\cos(x)+$

$b\sin(x))$. On a alors $y_p'(x) = -y_p(x) + e^{-x}(-a\sin(x) + b\cos(x))$ et $y_p''(x) = -2e^{-x}(-a\sin(x) + b\cos(x))$ (après simplifications).
D'où $y'' - 2y' + 5y = e^{-x}\left((7a - 4b)\cos(x) + (4a + 7b)\sin(x)\right)$ par identification on a $7a - 4b = -4$ et $4a + 7b = 7$. En résolvant ce système d'équations, on trouve $a = 0$ et $b = 1$. Une solution particulière de $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x)$ est $x \mapsto e^{-x}\sin(x)$.
Maintenant $1 + 2i$ est solution de l'équation caractéristique donc on cherche une solution particulière de $y'' - 2y' + 5y = -4e^{(1+2i)x}$ sous la forme $y_p(x) = (ax + b)e^{(1+2i)x}$.
On a alors $y_p'(x) = ae^{(1+2i)x} + (1 + 2i)(ax + b)e^{(1+2i)x} = ae^{(1+2i)x} + (1 + 2i)y_p(x)$ et $y''(x) = a(1 + 2i)e^{(1+2i)x} + (1+2i)y_p'(x) = 2a(1+2i)e^{(1+2i)x} + (-3+4i)y_p(x)$. Ensuite, $y''-2y'+5y = 2a(1+2i)e^{(1+2i)x} + (-3 + 4i)y_p(x) - 2ae^{(1+2i)x} - 2(1 + 2i)y_p(x) + 5y_p(x) = 4aie^{(1+2i)x}$. On a donc $4aie^{(1+2i)x} = -4e^{(1+2i)x}$ ceci implique $a = i$. Donc $y_p(x) = ix4e^{(1+2i)x} = xe^x(i\cos(x) - \sin(x)$. En prenant la partie imaginaire, on trouve la solution particulière de $y'' - 2y' + 5y = -4e^x\sin(2x)$ qui est $y_p(x) = xe^x\cos(2x)$

Les solutions générales sont $x \mapsto (k_1\cos(2x) + k_2\sin(2x))e^x$. Finalement, les solutions générales sont :

$$x \mapsto x\cos(2x)e^x + \sin(x)e^{-x} + (k_1\cos(2x) + k_2\sin(2x))e^x$$

Correction Ex 5

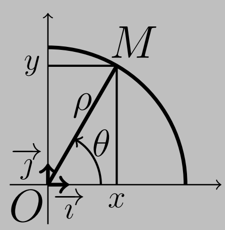
1. Non, il suffit de remplacer dans (EC).
2. On ne trouve pas de solution particulière évidente, la variation de la constante ne fonctionne pas...

Chapitre III :

Nombres complexes

Les nombres complexes sont un outil essentiel dans de nombreuses sciences appliquées (électronique, ..)

- i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. Un complexe est de la forme $z = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$
- a et b sont les parties réelles et imaginaires de z
- La forme **algébrique** ou **cartésienne** est $z = a + ib$. Le conjugué de z noté $\overline{z}$ ets $\overline{z} = a - ib$
- on note $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$
- La forme **exponentielle** ou **polaire** de z est $z = re^{i\theta}$ avec $r \geqslant 0$.
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, θ se trouve en connaissant les valeurs remarquables de sin et cos.
- r et θ sont le module et l'argument, qui ont une interprétation géométrique à connaitre.



- A connaitre :
  1. $\text{Ré}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\text{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\text{i}}$,
  2. $z = \overline{z} \Longleftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$,
  3. $z = -\overline{z} \Longleftrightarrow \text{Ré}\,(z) = 0 \Longleftrightarrow z$ est un nombre imaginaire pur,
  4. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$,
  5. $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$,
  6. $|z| = |\overline{z}|$,
  7. $z\overline{z} = |z|^2$,
  8. $|zz'| = |z||z'|$, donc $|z^n| = |z|^n$.
  9. si $z \neq 0$, $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$,
  10. si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.
  11. $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$, (**inégalité triangulaire**)
  12. $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$, donc $arg(z^n) = narg(z)$
  13. $arg(\dfrac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')$

- on appelle ***racine*** n***-ième*** de z, tout nombre complexe R tel que $R^n = z$.
- Si $z = \rho e^{i\theta}$, $(\rho \geqslant 0)$, alors z possède exactement n racines n-ièmes distinctes, $z_0, \dots, z_{n-1}$, données par :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\},\ z_k = \sqrt[n]{\rho}.e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

- cas particulier des racines carrées : tout complexe $z \neq 0$ admet deux racines carrées distinctes et opposées. On les trouve en résolvant le système : Soient $z = a + ib$ et $R = x + iy$ alors

$$R^2 = z \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (E1) \\ 2xy = b & (E2) \end{cases} \quad \text{de plus} \quad |R|^2 = |z| \Rightarrow x^2 + y^2 = |z|\ (E3)$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, avec $a \neq 0$, on considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

Les solutions de cette équation sont : $\boxed{z_1 = \dfrac{-b + rc_1}{2a} \text{ et } z_2 = \dfrac{-b + rc_2}{2a} = \dfrac{-b - rc_1}{2a}}$

où rc_1 et rc_2 sont les deux racines carrées complexes de $\Delta = b^2 - 4ac$,

- **Formules d'Euler**

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- **Formule de Moivre**

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta}$$

Exercice 6

Complétez le tableau :

Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$cos(\theta)$					
$sin(\theta)$					

Exercice 7

Donner la forme exponentielle des nombres complexes ci-dessous :

1. $z_1 = \sqrt{3} - i$
2. $z_2 = (1 + \sqrt{3}i)(1 - i)$
3. $z_3 = \dfrac{(1+i)^2}{(1+i\sqrt{3})^4}$
4. $z_4 = e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{5}}$
5. $z_5 = 1 + \cos\theta - i\sin\theta$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$
6. $z_6 = \dfrac{(j^2-1)^2}{j(j+1)^2}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$,
   on commencera par rappeler les propriétés de j.
7. $z_7 = \dfrac{j(j^2+1)^2}{(j+1)(j^2-1)^2}$
8. $z_8 = 2\sin^2(\theta) + i\sin(2\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$

Exercice 8

On a demandé à ChatGPT son aide pour traiter z_8 dans l'exercice précédent. Qu'en pensez vous ?

> **3.** $z_8 = 2\sin^2(\theta) + i\sin(2\theta)$
>
> Utilisons l'identité $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$, donc :
>
> $$2\sin^2(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$$
>
> Donc :
>
> $$z_8 = 1 - \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = 1 + (-\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)) = 1 + e^{i(2\theta+\pi)}$$
>
> car $-\cos x + i\sin x = e^{i(x+\pi)}$
>
> Donc :
>
> $$\boxed{z_8 = 1 + e^{i(2\theta+\pi)}}$$

Exercice 9

Donner la partie réelle et la partie imaginaire de : (j est défini précédemment)

1. $a = 1 + j^7 + j^{17} + j^{19} + j^{24}$
2. $b = 1 + 2t - t^3 + 3t^4 - 2t^5 - t^{12} + t^{15}$ avec $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 10

Soient 2 nombres complexes z et z' .

1. Montrez que :
$$2(|z|^2 + |z'|^2) = |z+z'|^2 + |z-z'|^2$$
2. Cette identité s'appelle l'identité du parallélogramme. Pourquoi ?

Exercice 11

Soient a, b, c 3 complexes tq $|a| = |b| = |c| = 1$, avec $a \neq c, b \neq c$ Montrer que :

$$Arg(\frac{c-b}{c-a}) = \frac{1}{2}Arg(\frac{b}{a}) \quad (\pi)$$

Interprétez cette égalité géométriquement.

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = 3 - 4i$
2. $z^2 = -15 + 8i$
3. $(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$
4. $z^8 = -\mathrm{i}$
5. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$
6. $(z-2)^6 + (z-2)^3 + 1 = 0$

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 1$.

1. Résoudre $z^{n+1} = 1$. On note $z_0 = 1$ et $z_1, \dots, z_n$ les racines obtenues.
2. Montrer que si $k \in \{1, \dots, n\}$, $1 + z_k + z_k^2 + z_k^3 + \dots + z_k^n = 0$.
3. En déduire les racines de $1 + X + X^2 + \dots + X^n$.
4. Résoudre $1 - z^2 + z^4 + \dots + (-1)^n z^{2n} = 0$.

Exercice 14

1. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. Exprimer $\cos^4 x$ en fonction de sinus et cosinus d'angles multiples de x *(on dit qu'on linéarise* $\cos^4(x)$*)*
3. Exprimer $\cos(8x)$ et $\sin(7x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
4. Exprimer $\sin^7 x$, $\cos^3(x)\sin^4(x)$, $cos^5(x)$ en fonction de sinus et cosinus d'angles multiples de x.

Exercice 15

En optique, l'étude du phénomène de diffraction dans les réseaux fait intervenir la somme :

$$s(M) = cos(wt) + cos(wt - \frac{2\pi asin(\theta)}{\lambda}) + cos(wt - \frac{2\pi 2asin(\theta)}{\lambda}) + ... + cos(wt - \frac{2\pi(n-1)asin(\theta)}{\lambda})$$

Dans cette somme, θ, a et $\lambda(\neq 0)$ sont des réels. On note $\underline{s(M)}$ la représentation complexe de $s(M)$. Calculer l'éclairement au point M, donné par : $E(M) = |\underline{s(M)}|^2$.

Exercice 16

Le but de l'exercice est de donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ainsi que celles des sinus correspondants.

1. On pose $P(z) = z^5 - 1$. Donner les 5 racines de P et les représenter (approximativement) sur le cercle unité.
2. Factoriser P sous la forme $P(z) = (z-1)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 4 et vérifier que $Q(0) \neq 0$.
3. On pose $u = z + \frac{1}{z}$, montrer qu'on peut écrire $Q(z) = z^2 R(u)$ où R est un polynôme de degré 2.
4. Déterminer les racines de R, en déduire une factorisation de Q en deux polynômes de degré 2 à coefficients réels (en la variable z).
5. Terminer la factorisation de Q.
6. En déduire les relations cherchées.

Elements de corrections

Correction Ex 6

cherchez dans vos cours....

Correction Ex 7

$$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}, z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, z_4 = 2cos(\frac{\pi}{15})e^{i\frac{4\pi}{15}}, z_5 = 2cos(\frac{\theta}{2})e^{-i\frac{\theta}{2}}, z_6 = -3, z_8 = 2e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}sin(\theta)$$

Correction Ex 8

Ce n'est pas la forme demandée, et il y a par ailleurs une grossière erreur de formule de calcul...

Correction Ex 9

1. $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $b = 3\sqrt{2} - 1 + i(-\sqrt{2})$

Correction Ex 10

1. Mettre z et z' sous la forme cartésienne $a + ib$.
2. La somme des carrés des longueurs des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses deux diagonales.

Correction Ex 11

Notons $a = e^{i\theta_a}, ...$

$\frac{c-b}{c-a} = \frac{e^{i\theta_c} - e^{i\theta_b}}{e^{i\theta_c} - e^{i\theta_a}} = \frac{e^{i\frac{\theta_c+\theta_b}{2}}}{e^{i\frac{\theta_c+\theta_a}{2}}} \frac{e^{i\frac{\theta_c-\theta_b}{2}} - e^{-i\frac{\theta_c-\theta_b}{2}}}{e^{i\frac{\theta_c-\theta_a}{2}} - e^{-i\frac{\theta_c-\theta_a}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\theta_c+\theta_b}{2}}}{e^{i\frac{\theta_c+\theta_a}{2}}} \frac{2isin(\frac{\theta_c-\theta_b}{2})}{2isin(\frac{\theta_c-\theta_a}{2})}$.

Or l'argument de $\frac{2isin(\frac{\theta_c-\theta_b}{2})}{2isin(\frac{\theta_c-\theta_a}{2})}$ est 0 modulo π...

Correction Ex 12

1. $z = 2 - i, -2 + i$
2. $z = 1 + 4i, -1 - 4i$
3. $\Delta = -2i$
4. lire le cours
5. $z = \frac{1 + z_k}{z_k - 1}$, où $z_k = \sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3})}$, si $k \in \{0, ...5\}$
6. $z = 2 + e^{i(\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3})}$ ou $z = 2 + e^{i(\frac{4\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3})}$, si $k \in \{0, ...2\}$.

Correction Ex 13

1. C'est le cours.
2. $1 + z_k + z_k^2 + z_k^3 + \cdots + z_k^n = \frac{1 - z_k^{n+1}}{1 - z_k} = 0$ (car $z_k \neq 1$)
3. cf question précédente
4. Poser $X = -z^2$

Correction Ex 14

1. $cos(4x) = 8cos^4(x) - 8cos^2(x) + 1$
2. $cos^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}cos(2x) + \frac{1}{8}cos(4x)$
3. $cos(8x) = 128cos^8(x) - 256cos^6(x) + 160cos^4(x) - 32cos^2(x) + 1$ et $sin(7x) = sin(x)(64cos^6(x) - 80cos^4(x) + 24cos^2(x) - 1)$
4. - $sin^7(x) = \frac{35}{64}sin(x) - \frac{21}{64}sin(3x) + \frac{7}{64}sin(5x) - \frac{1}{64}sin(7x)$
   - $cos^3(x)sin^4(x) = \frac{3}{64}cos(x) - \frac{3}{64}cos(3x) - \frac{1}{64}cos(5x) + \frac{1}{64}cos(7x)$

- $cos^5(x) = \frac{5}{8}cos(x) + \frac{5}{16}cos(3x) + \frac{1}{16}cos(5x)$

Correction Ex 15

$$\underline{|s(M)|}^2 = \frac{4sin^2(\frac{n\pi a sin(\theta)}{\lambda})}{sin^2(\frac{\pi a sin(\theta)}{\lambda})}$$

Correction Ex 16

1. les racines s'écrivent sous la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0..4$
2. $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$, $Q(z) = 1 \neq 0$.
3. $\frac{Q(z)}{z^2} = z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \underbrace{(z^2 + \frac{1}{z^2} + 2)}_{=u^2} - 1 + z + \frac{1}{z} = \underbrace{u^2 - 1 + u}_{R(u)}$, donc $Q(z) = z^2R(u)$, avec

   $R(u) = u^2 + u - 1$
4. Les racines de R sont $u_a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $u_b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

   Donc $Q(z) = z^2(z + \frac{1}{z} - u_a)(z + \frac{1}{z} - u_b) = (z^2 + 1 - u_a z)(z^2 + 1 - u_b z)$
5. On résout $(z^2 + 1 - u_a z) = 0$ et $(z^2 + 1 - u_b z) = 0$ pour trouver toutes les racines de Q.
   Le discriminant de $(z^2 + 1 - u_a z) = 0$ est $u_a^2 - 4$, qui est négatif, on trouve 2 racines (conjuguées) $\frac{u_a + i\sqrt{4 - u_a^2}}{2}$ et $\frac{u_a - i\sqrt{4 - u_a^2}}{2}$. Ce qui donne en simplifiant

   $$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5} + 2i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{4} \text{ et } z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5} - 2i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{4}$$

   En raisonnant de même sur l'équation $(z^2 + 1 - u_b z) = 0$, on trouve 2 autres racines

   $$z_3 = \frac{-1 - \sqrt{5} + 2i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{4} \text{ et } z_4 = \frac{-1 - \sqrt{5} - 2i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{4}$$

   Donc $Q(z) = (z-1)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$.
6. Il suffit d'identifier les parties réelles et imaginaires des racines trouvées à la question 1 et à la question précédente (s'aider du signe en cas de doute)

   $$cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } sin(\frac{2\pi}{5}) = \frac{2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{4} = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$$

   $$cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } sin(\frac{4\pi}{5}) = \frac{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{4} = \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}$$

Chapitre IV :

Polynômes et fractions rationnelles

Les polynomes et fractions rationnelles sont des objets apparaissant fréquemment en sciences, que ce soit dans les équations différentielles ou les fonctions de transfert.

- On appelle **polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ une fonction P s'écrivant : $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ appelés les ***coefficients de*** P.
- n est le degré de P, a_n le coefficient dominant.
- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont le degré est inférieur ou égal à n.
- Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$ alors

$$\exists\ !\ (Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ \big(\ A = Q.B + R\ \big)\ et\ \big(\ \deg\ (R) < \deg\ (B)\ \big)$$

  Alors Q est appelé ***quotient*** et R est appelé ***reste*** de la division euclidienne de A par B.
- B divise A si le reste de la division euclidienne de A par B est nul, autrement dit si $A = BQ$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que P est ***irréductible*** si :
  — deg $(P) \geqslant 1$
  — les seuls polynômes qui divisent P sont les polynômes constants et les polynômes λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- On dit que α ***est une racine de*** P si $P(\alpha) = 0$. Cela équivaut à dire que $(X - \alpha) \mid P$.
- α est une racine de P de ***multiplicité*** m si et seulement si α est une racine de P, P', $\ldots$, $P^{(m-1)}$ mais pas de $P^{(m)}$. On aura alors $(X - \alpha)^m \mid P$ et $(X - \alpha)^{m+1} \nmid P$
- P possède au maximum $m = \deg\ (P)$ racines comptées avec leur multiplicité. Autrement dit, si P a plus de racines que son degré, il est nul.
- Tout polynôme possède une racine complexe, ce qui se réécrit de façon équivalente :
  1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
  2. Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré n possède exactement n racines comptées avec leur multiplicité
  3. $\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \exists\ !\ (a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1},\ P = a \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$
- Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont
  (a) les polynômes de degré 1 ;
  (b) les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Exercice 17

Pour chacun des polynômes suivants, donner son coefficient dominant ainsi que son degré.

$$P_0 = 1 + \sqrt{3}X - 2X^2 \qquad P_1 = X^7 + 4X^8 + (1-\mathrm{i})X^3$$

$$P_2 = 3X(1+X^2) + 2X^3 - 1 \qquad P_3 = (\mathrm{i}+X)(1+3X^2-\mathrm{i}X)$$

$$P_4 = \sum_{k=1}^{4}(k!+1)X^k \qquad P_5 = (3X - 7X^2 + 4)'$$

$$P_6 = \big[X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)\big]' \qquad P_7 = (1-X^n)(1+X)^2 + X^{n+2}, \quad n \geqslant 0.$$

Exercice 18

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme

$$A(X) = X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5.$$

Exercice 19

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Soit α une racine de P. Démontrer que $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P.
2. Comparer l'ordre de multiplicité de $\bar{\alpha}$ et de α.

Exercice 20

On doit résoudre le problème suivant : Trouver trois polynôme P_1, P_2 et P_3 vérifiant :

- Leurs coefficients sont entiers.
- Ils sont de degré 2
- P_2 et P_3 ont des racines rationnelles
- $P_3 = P_2 - P_1$

1. Expliquer comment trouver P_1 et P_2 respectant les 3 premières conditions
2. Si on choisit P_1 et P_2 au hasard, la dernière condition sera -t-elle automatiquement vraie ?
3. Voici, après de nombreux essais, la réponse finale de ChatGPT :

✅ **Bonne solution respectant toutes les contraintes données :**

- Coefficients entiers
- Tous de degré 2
- P_2 et P_3 ont racines rationnelles
- $P_3 = P_2 - P_1$

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1(X) = X^2 + 2X + 2 \\ P_2(X) = X^2 + 5X + 6 \\ P_3(X) = P_2 - P_1 = 3X + 4 \quad \text{⚠® mais degré 1} \end{array}}$$

👉 **Il est impossible d'avoir les trois de degré 2, avec P_2 et P_3 à racines rationnelles et $P_3 = P_2 - P_1$, sauf si on accepte que P_1 ait des racines irrationnelles.**

Souhaitez-vous qu'on impose plutôt que **tous trois soient irréductibles** ou **tous aient racines rationnelles** ?

A t-il raison ? Si non, proposer une solution.

Exercice 21

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$Q_0 = X^2 + 1, \qquad Q_1 = X^2 - 3X - 4, \qquad Q_2 = X^2 - 2X + 2, \qquad Q_3 = X^3 - 8.$$

Exercice 22

Soit $P(X) = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + X - 2$.

1. Déterminer deux racines évidentes a et b de P.
2. Effectuer la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
3. En déduire toutes les racines de P.

Exercice 23

Vérifier que i est racine du polynôme

$$P(X) = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6.$$

En déduire la factorisation de P sur $\mathbb{C}$.

Exercice 24

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 + 1$ **2.** $X^8 - 1$ **3.** $(X^2 - X + 1)^2 + 1$

Exercice 25

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$;
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$;
3. $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

- Une ***fraction rationnelle*** F ***à coefficients dans*** $\mathbb{K}$ est un quotient de deux polynômes : $F = \dfrac{A}{B}$. (avec A et $B \neq 0$ dans $\mathbb{K}[X]$)
- Le degré de F est $deg(A) - deg(B)$.
- La forme irréductible de F est $F = Q + \dfrac{R}{B}$, où $A = BQ + R$ est la division euclidienne de A par B. On appelle Q la ***partie entière*** de F. La partie $\dfrac{R}{B}$ est donc de degré strictement négatif.
- Toute fraction ***de degré*** < 0 possède une unique décomposition en éléments simples. (DES)
- Dans $\mathbb{R}(X)$, les éléments simples s'écrivent :
  1. $\dfrac{b}{(X-a)^n}$, avec $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^*,\ n \in \mathbb{N}^*$. (éléments simples de ***première espèce***)
  2. $\dfrac{aX+b}{(X^2+cX+d)^n}$, avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, tel que, $c^2 - 4d < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. (éléments simples de ***deuxième espèce***).
- Pour trouver les coefficients dans la DES, il faut connaitre les méthodes d'identification, de la "multiplication-evaluation", de la valeur, de la limite.

Exercice 26

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{1}{X^3 - X}$ **2.** $\dfrac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

Exercice 27

Décomposer sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$ **2.** $\dfrac{X^2 + 3X + 1}{(X-1)^2(X-2)}$ **3.** $\dfrac{1}{X^4 - 1}$

Exercice 28

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\mathbf{1.}\quad \frac{2X^2+1}{(X^2-1)^2} \qquad \mathbf{2.}\quad \frac{X^3+1}{(X-1)^3}$$

Exercice 29

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}$$

Elements de corrections

Correction Ex 17

- Pour P_0, degré 2, coef dominant -2.
- Pour P_1, degré 8, coef dominant 4.
- Pour P_2, degré 3, coef dominant 5.
- Pour P_3, degré 3, coef dominant 3.
- Pour P_4, degré 4, coef dominant 25.
- Pour P_5, degré 1, coef dominant -14.
- Pour P_6, degré 4, coef dominant 5
- Pour P_7, degré $n+1$, coef dominant -2 si $n \geqslant 2$, si n=1, $deg(P_7) = 2$ et le coef dominant est -1, si $n = 0$, $deg(P_7) = 2$ et le coef dominant est 1.

Correction Ex 18

Multiplicité 3.

Correction Ex 19

Correction Ex 20

1. Choisir d'abord les racines, en déduire le polynome
2. Non....
3. Le chatbot se trompe, bien sur... Penser à proposer P_2 ayant un lien avec P_1.

Correction Ex 21

- $Q_0 = (X+i)(X-i)$
- $Q_1 = (X+1)(X-4)$
- on trouve $\Delta = -4$, donc ....
- $Q_3 = (X-2)(X^2+2X+4)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction Ex 22

1. tester 1,-1, 2, -2...
2. le quotient de la division est $X^2 - X - 1$
3. les racines manquantes sont donc celles de $X^2 - X - 1$

Correction Ex 23

Chercher une deuxième racine grâce à l'exercice 3.

Correction Ex 24

1. $P = (X^2 + X\sqrt{2} + 1)(X^2 - X\sqrt{2} + 1)$
2. $P = (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2+X\sqrt{2}+1)(X^2-X\sqrt{2}+1)$
3. $a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib)$ donc on peut écrire $P = ((X^2-X+1)-i)((X^2-X+1)+i)$... Reste à trouver toutes les racines, penser à l'exercice 3. on trouve $(X^2-X+1)^2+1 = (X^2+1)(X^2-2X+2)$

Correction Ex 25

1. quotient $= (x^2 + 2X + 7)$, reste nul
2. quotient $= x^2 - 3x - 5$, reste $x + 3$
3. quotient $= x^3 - x - 1$, reste $x + 3$

Correction Ex 26

1. $\dfrac{-1}{x} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}$
2. $1 + \dfrac{\frac{27}{2}}{x-3} - \dfrac{8}{x-2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}$

Correction Ex 27

1. $1 + \dfrac{5x+3}{x^2-3x+2}$... puis finir.
2. $\dfrac{11}{x-2} - \dfrac{5}{(x-1)^2} - \dfrac{10}{x-1}$
3. $\dfrac{\frac{1}{4}}{x-1} - \dfrac{\frac{1}{4}}{x+1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{x^2+1}$

Correction Ex 28

1. $\dfrac{\frac{3}{4}}{(x-1)^2} + \dfrac{\frac{1}{4}}{x-1} + \dfrac{\frac{3}{4}}{(x+1)^2} - \dfrac{\frac{1}{4}}{x+1}$
2. $1 + \dfrac{3}{(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{(x-1)^3}$

Correction Ex 29

$1 + \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x}{x^2+1}$

Chapitre V :

Algèbre linéaire : Matrices, espaces vectoriels,

- Une matrice de $M_{np}(\mathbb{K})$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ possédant n lignes et p colonnes.
- On peut ajouter et multiplier des matrices entre elles, selon des règles à connaitre.
- I_n est la matrice carrée nulle, avec que des 1 sur la diagonale.
- $AI_n = A = I_nA$ pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$.
- A est ***inversible*** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Dans ce cas, B est appelée ***inverse*** de A et notée A^{-1}.
- L'inverse sert à résoudre des systèmes d'équations linéaires.
- Le determinant d'une matrice carrée est un réel tel que $det(A) = 0 \Longleftrightarrow A$ non inversible
- Pour $n = 2$: $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$
- Pour $n = 3$: $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_3\beta_2\gamma_1$
- Si une matrice n'est pas inversible, cela signifie qu'il existe un lien entre ses colonnes (ou ses lignes)
- On utilise la technique du développement par rapport à une ligne ou une colonne pour calculer les déterminants de taille $\geqslant 4$.

Exercice 30

1. Calculer les produits de matrices indiqués, lorsqu'ils sont définis.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Soient deux matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les matrices :
   AB, BA, A^2, B^2, $A^2 - B^2$, $(A+B)(A-B)$, $A^2 + B^2 + 2AB$, $(A+B)^2$.

Exercice 31

1. Traduire les équations suivantes en système d'équations :
   (a) $x\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+2y\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\8\\-15\end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix}x\,y\,z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2&-1\\-3&0&2\\3&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\,11\,0\end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\-3&0&2\\3&2&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\11\\0\end{pmatrix}$
2. Ecrire le système $\begin{cases}x+y+2z=5\\x-y-z=1\\x+z=3\end{cases}$ sous forme matricielle.

Exercice 32

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases}x+y+2z=5\\x-y-z=1\\x+z=3\end{cases}$
2. $\begin{cases}2x+y-2z=4\\x+2y+2z=1\\3x+3y=5\end{cases}$
3. $\begin{cases}2x+4y-4z+t=0\\3x+6y+z-2t=-7\\-x+y+2z+3t=4\\x+y-4z+t=2\end{cases}$

Exercice 33

Soit $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Montrer que $A^2=2I_3-A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 34

Calculer les déterminants suivants et factoriser quand c'est possible :

$\begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&3&1\\0&-1&4\\0&0&5\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&0&0\\3&2&0\\1&0&-2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&0&3\\2&0&4\\3&-1&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}0&a&0\\0&0&b\\c&0&0\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1+a&a&a\\b&1+b&b\\c&c&1+c\end{vmatrix}$

Exercice 35

Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&-2&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&1\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

Exercice 36

On cherche à résoudre à l'aide de ChatGPT le système suivant :

$$\begin{cases}x+y+z=6\\x+2y-z=2\\-2x+y-z=-3\end{cases}$$

Montrer que le résultat final proposé est faux, trouver l'erreur dans les calculs du chatbot :

1er Système :

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y-z=2 \\ -2x+y-z=-3 \end{cases}$$

Mise sous forme matricielle :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Nous résolvons $AX=B$ en calculant $X=A^{-1}B$.

Calcul de A^{-1}

Nous devons d'abord déterminer si A est inversible en calculant son déterminant :

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Développement selon la première ligne :

$$\det(A)=1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1(2\times(-1)-(-1)\times 1)-1(1\times(-1)-(-2)\times(-1))+1(1\times 1-(-2)\times 2)$$

$$=1(-2+1)-1(-1-2)+1(1+4)$$

$$=1(-1)-1(-3)+1(5)$$

$$=-1+3+5=7\neq 0$$

Puisque $\det(A)\neq 0$, A est inversible, donc nous pouvons calculer A^{-1} et en déduire X.

Calcul de $X=A^{-1}B$

Nous pouvons effectuer ces calculs directement, mais pour aller plus vite, utilisons un calculateur :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Effectuons le produit matriciel :

$$X=\begin{pmatrix} (1\times 6)+(-1\times 2)+(-1\times -3) \\ (1\times 6)+(2\times 2)+(1\times -3) \\ (3\times 6)+(-3\times 2)+(-2\times -3) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 6-2+3 \\ 6+4-3 \\ 18-6+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Donc, **la solution du premier système est :**

$$x=7, \quad y=7, \quad z=18$$

- Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un ensemble possédant deux lois : une addition interne et une multiplication externe.
- Les éléments de E sont appelés ***vecteurs*** et ceux de $\mathbb{K}$ ***scalaires***
- Il existe de nombreux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, en particulier $\mathbb{K}^n$ en est un.
- Tous les sous ensembles de $\mathbb{K}^n$ définis par un systèmes d'équations linéaires sont des espaces vectoriels.
- Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$ des vecteurs, une combinaison linéaire (CL) de ces vecteurs est une expression du type $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots \lambda_n u_n$, où $\lambda_i \in \mathbb{K}$.
- Une famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est ***liée*** si un des vecteurs est une CL des autres. Elle est ***libre*** dans le cas contraire.
- Soit une famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$. l'ensemble de toutes les CL de ces n vecteurs est un sev de E, c'est le ***sous-espace vectoriel engendré par*** la famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$:

$$\mathrm{Vect}(\{u_1, \ldots, u_n\}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \middle| (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

- Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs de F. On dit que cette famille est ***une famille génératrice de*** F ssi $F = \mathrm{Vect}(\{v_1, \ldots, v_p\})$. Cela signifie que tout vecteur de F s'écrit comme une CL des vecteurs $\{v_1, \ldots, v_p\}$.
- Soit F un sev engendré par $\{v_1, \ldots, v_p\}$. Si de plus $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est libre, alors l'écriture d'un vecteur de F sous la forme $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_n v_n$ est unique.
- Une base de F est une famille ***libre*** et ***génératrice*** de F. Cela signifie que si $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une base de F, tout vecteur $u \in F$ s'écrit de façon unique

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_n v_n$$

  Les scalaires λ_i sont appelées les ***coordonnées*** ou ***composantes*** de u sur la base $\{v_1, \ldots, v_p\}$.
- Tout espace vectoriel F non trivial possède une infinité de bases, mais qui ont toutes le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelée la ***dimension*** de F.
- Si $F \subset E$, alors $dim(F) \leqslant dim(E)$. Si par ailleurs $dim(F) = dim(E)$, alors $F = E$.

Exercice 37

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ en tant que $\mathbb{R}$ espace vectoriel :

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{(x, y, 0)\ :\ x, y \in \mathbb{R}\}, & A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x + y + z = 0\}, \\ A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x + y + z = 1\}, & A_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 = z^2\}, \\ A_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 3x = 2y + 5z\}, & \end{array}$$

Exercice 38

Indiquer si les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont libres et/ou génératrices. Lesquelles sont des bases de $\mathbb{R}^3$?

1. $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$,
2. $((1, 1, 1), (0, 0, 0))$,
3. $((1, 1, 1), (1, 2, 1), (0, 1, 0))$,
4. $((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$.

Exercice 39

Montrer que les vecteurs $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1, 1, 1)$.

Exercice 40

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $F = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\big\}$. L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}\diagdown^4$? Si oui, en donner une base et déduire sa dimension.

Exercice 41

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y + z = 0\}$$
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y + 2z = 0\}.$$

1. Donner une base de F, une base de G, en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F trouvée en 1 et des vecteurs de la base de G trouvée en 2 est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?

Exercice 42

Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère les trois vecteurs suivants :

$$e_1' = e_1 + e_2 + e_3; \quad e_2' = e_1 + e_2 \qquad \text{et} \quad e_3' = 2e_1$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ une base de E.
2. Déterminer les composantes du vecteur $u = 2e_1' - e_2' + e_3$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer les composantes du vecteur $v = 11e_1 + e_2 + 3e_3$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 43

Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f l'endomorphisme de E (c'est-à-dire l'application linéaire de E dans E) défini par :

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3, \quad f(e_2) = e_1 + 2e_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1 - e_2 - e_3$$

On considère les trois vecteurs suivants :

$$e_1' = e_1 + 2e_2 + 3e_3; \quad e_2' = e_1 + e_2 \qquad \text{et} \quad e_3' = e_2 + e_3$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ une base de E.
2. Déterminer les images par f des vecteurs de $\mathcal{B}'$ (on donnera leurs composantes dans $\mathcal{B}'$), en utilisant la matrice de passage.

- Une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ est ***diagonalisable*** si il existe P inversible et D diagonale telle que $D = P^{-1}MP \Longleftrightarrow M = PDP^{-1}$
- Les termes diagonaux de D sont les ***valeurs propres*** de M.
- Les vap sont les racines de P_M , le ***polynôme caractéristique*** de M défini par

$$P_M(\lambda) = \det\left(M - \lambda I_n)\right)$$

- On note E_λ, le **sous-espace propre associé à** λ par

$$E_\lambda = \left\{X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; AX = \lambda X\right\} = \operatorname{Ker}\left(A - \lambda I_n\right)$$

- Les vecteurs de base des E_{λ_i} forment la matrice de passage P.

Exercice 44

Vrai/faux

1. Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
2. Si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
3. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Exercice 45

Diagonalisation des matrices

1. Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est diagonalisable ou pas. Si oui, donner la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$M = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Exercice 46

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Elements de corrections

Correction Ex 30

1. (a) Ce produit n'est pas défini.
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14)$
2. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = A, B^2 = I_2, A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$
   $A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Correction Ex 31

1. (a) $\begin{cases} 2x + 2y - z = 10 \\ x + 4z = 8 \\ 3x - 4y + 3z = -15 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} x - 3y + 3z = 7 \\ 2x + 2z = 11 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ -3x + 2z = 11 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$
2. $AX = B$, où on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Correction Ex 32

Le premier système admet une unique solution $(3, 2, 0)$.
Concernant le deuxième système, on remarque que la troisième ligne est la somme des deux premières. Ce système admet une infinité de solutions : $\left\{(1, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) + \lambda(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}); \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
Le dernier système admet une unique solution $(1, -1, 0, 2)$

Correction Ex 33

Il suffit d'utiliser la définition d'une matrice inversible et le fait que $A^2 = 2I_3 - A$...

Correction Ex 34

$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3,, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = abc$ et $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1 + a + b + c$

Correction Ex 35

1. $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Correction Ex 36

il suffit de tester les solutions proposées dans le système initial pour voir que la réponse est incorrecte.

Correction Ex 37

1. Oui, c'est l'hyperplan d'équation $z = 0$
2. Oui c'est le noyau d'une forme linéaire.
3. Non il ne contient pas le vecteur nul.
4. Non il n'est pas stable par combinaison linéaire.
5. Oui

Correction Ex 38

1. c'est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Ni libre ni génératrice
3. C'est une famille liée
4. Elle n'est pas libre mais elle est génératrice

Correction Ex 39

Il suffit de prouver que c'est une famille libre ou il suffit de voir que le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ est non nul. Les coordonnes du vecteur u dans cette base sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Correction Ex 40

Il suffit d'écrire F comme un vect. Il admet $(((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ comme base et donc $dim(F) = 3$

Correction Ex 41

1. Les vecteurs $(2, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ engendrent donc F. De plus, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, dont la famille est libre. C'est une base de F qui est de dimension 2.
   Les vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ engendrent donc G. De plus, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, dont la famille est libre. C'est une base de G qui est de dimension 2.

2. Le vecteur $(-1, 0, 1)$ engendre $F \cap G$. Comme une famille constituée d'un vecteur non-nul est libre, $(-1, 0, 1)$ est une base de $F \cap G$ qui est de dimension 1.
3. On note $u = (2, 1, 0)$, $v = (-1, 0, 1)$ et $w = (1, 2, 0)$. On peut montrer alors que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet il s'agit d'une famille de trois vecteurs, il suffit de montrer qu'elle est libre.

Correction Ex 42

1. Il s'agit d'une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension trois, il suffit de montrer qu'elle est libre.
2. Les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$, sont $(3, 1, 2)$.

3. Si on note X la matrice des coordonnées de v dans $\mathcal{B}$ et X' la matrice des coordonnées de v dans $\mathcal{B}'$ (celle qu'on cherche à trouver), alors $X' = P^{-1}X$, où P est ma matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On trouve $X' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Correction Ex 43

1. Voir les exercices précédents
2. Si on note $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f)$, alors $A' = P^{-1}AP$.
   Une fois A' calculée, on en déduit que
   $$f(e_1') = \frac{1}{2}e_1' + \frac{13}{2}e_2' - \frac{11}{2}e_3',$$
   $$f(e_2') = -\frac{1}{2}e_1' + \frac{7}{2}e_2' + \frac{1}{2}e_3'$$
   et
   $$f(e_3') = 2e_2' - e_3'$$

Correction Ex 44

1. Vrai
2. Faux
3. Faux

Correction Ex 45

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)$. On a $A = PD_1P^{-1}$ où $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
   Le polynôme caractéristique de B est : $\chi_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ qui admet 1 comme racine double. On ne peut pas donc conclure directement. Il faut déterminer d'abord les sous-espaces propres.
   La recherche du sous-espace propre associé à 2 amène au vecteur propre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui engendre donc ce sous-espace.
   L'étude du sous-espace propre associé à 1 conduit à l'équation :
   $$x - y + z = 0$$
   qui est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   On a donc $B = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Enfin, le polynôme caractéristique de la matrice C est $\chi_C(\lambda) = (\lambda - 1)(2 - \lambda)^2$. Cherchons donc le sous-espace propre associé à 2 en résolvant le système $(C - 2I_3)X = 0$. On trouve que le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par $(2, -3, 1)$ qui est de dimension 1. La matrice C n'est pas diagonalisable.
2. Si M était diagonalisable elle serait semblable à quoi ?

Correction Ex 46

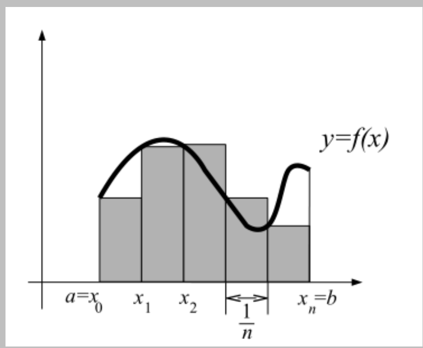
Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$. On ne peut pas donc conclure directement. Il faut déterminer d'abord les sous-espaces propres. Tout calcul fait on trouve : $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il vient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

Chapitre VI :

Intégration

Objet mathématique essentiel utilisé dans tous les domaines scientifiques.

- Calcul de primitives :
  - si la fonction à intégrer à calculer s'exprime comme un produit, on peut penser à faire une intégration par parties (IPP)
  - Si une expression semble se répéter on peut penser à faire un changement de variables.
  - Une fraction rationnelle s'intègre après l'avoir décomposée en éléments simples.
- Géométriquement, l'intégrale de f sur $[a, b]$ correspond à l'aire algébrique sous la courbe de f. Elle peut être vue comme la limite quand n tend vers $+\infty$ de la somme des aires de rectangles de base $1/n$ et de hauteur $f(x_n)$.



- si G est une primitive de f, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = [G(t)]_a^b$
- Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.
  1. (**linéarité de l'intégrale**) Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
  2. (**croissance de l'intégrale**) Si f est positive, alors $\displaystyle\int_a^b f$ est positive.
  3. $\displaystyle\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$.
  4. si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant \int_a^b g$.
  5. (**relation de Chasles**) Si $c \in]a, b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
  6. (**inégalité de Cauchy-Schwarz**)
  $$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt$$

Exercice 47

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes sur un intervalle bien choisi :

1. $f_1 : x \longmapsto \dfrac{x}{(x^2+3x+2)}$
2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{x^3-x}$
3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

Exercice 48

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes : (penser au changement de variables)

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} \qquad h(x) = \frac{\ln x}{x}$$
$$k(x) = \cos(x)\sin^2(x) \qquad l(x) = \frac{1}{x\ln x} \qquad m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}.$$

Exercice 49

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégrations par parties :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\, dx.$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x\, dx.$
3. $\displaystyle\int_0^{1} (1+x+x^2)e^x\, dx$

Exercice 50

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto xe^x$.
2. $x \mapsto sin^3(x)$.
3. $x \mapsto x^2\ln x$
4. $x \mapsto (\ln x)^2$ (en utilisant celle de $x \mapsto \ln x$)
5. $x \mapsto \cos x \exp x$
6. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ (chgt de variable)

Exercice 51

On cherche à calculer une primitive de $(x^2-2x)e^{3x}$ et on s'est aidé de Chat GPT comme en témoignent les captures d'écran ci dessous :

calcule la primitive de (x^2-2x)e^{3x}

Pour calculer la **primitive** de l'expression

$$\int (x^2-2x)e^{3x}\,dx$$

on peut utiliser la méthode d'intégration par parties **deux fois.**

Étape 1 : Première intégration par parties

Soit :

- $u = x^2 - 2x \Rightarrow u' = 2x - 2$
- $dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$

Après quelques calculs, voici sa réponse finale :

Résultat final :

$$\boxed{\int (x^2 - 2x)e^{3x}dx = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{8}{27}\right)e^{3x} + C}$$

où C est la constante d'intégration.

1. Commentez le résultat final.
2. Que dire de la méthode proposée ?
3. Refaire le calcul.

Exercice 52

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ (IPP)
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$ (à l'aide d'un changement de variable simple)
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ (changement de variable $x = \tan t$)
4. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$ (changement de variable $u = \frac{1}{x}$)

Exercice 53

Soit f la fonction définie pour $x > 0$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t+x}dt$.

1. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x}$. En déduire la valeur de la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Elements de corrections

Correction Ex 47

1. Sur tout intervalle ne contenant pas -1 et -2, une primitive est $-ln|x+1|+2ln|x+2|$
2. Sur tout intervalle ne contenant pas 0,1 et -1, une primitive est $-ln|x|+\frac{1}{2}ln|x^2-1|$
3. Sur tout intervalle ne contenant pas 1, 2 et 3, une primitive est $x+\frac{27}{2}ln(|x-3|)-8ln(|x-2|)+12ln(|x-1|)$

Correction Ex 48

1. On reconnait que $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=1+x^2>0$. Les primitives de f sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ où $C\in\mathbb{R}$
2. On reconnait que $g(x)=\frac{1}{3}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $1+e^{3x}>0$. Les primitives de g sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{3}\ln(1+e^{3x})+C$ où $C\in\mathbb{R}$
3. On reconnait que $h(x)=u'(x)\times u(x)$ avec $u(x)=\ln x$. Les primitives de h sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$ où $C\in\mathbb{R}$. Remarquons que de telles fonctions ne sont définies que sur $]0;+\infty[$
4. On reconnait que $k(x)=\frac{1}{3}u'(x)(u(x))^2$ avec $u(x)=\sin x$. Les primitives de k sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{3}(\sin x)^3+C$ où $C\in\mathbb{R}$
5. En écrivant que $l(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$, On reconnait que $l(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=\ln x$. Les primitives de l sur l'intervalle $]1;+\infty[$ sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto\ln(\ln x)+C$ où $C\in\mathbb{R}$
6. On reconnait que $m(x)=\frac{3}{2}u'(x)\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=1+x^2$. Les primitives de m sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto(1+x^2)^{3/2}+C$ où $C\in\mathbb{R}$

Correction Ex 49

1. $\int_0^{\pi}x\cos x\,dx=[x\sin(x)+\cos(x)]_0^{\pi}=-2.$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin x\,dx=[\sin(x)-x\cos(x)-\cos(x)]_0^{\pi/2}=2.$
3. $\int_0^1(1+x+x^2)e^x\,dx=\left[(2-x+x^2)e^x\right]_0^1=2(e-1)$

Correction Ex 50

1. $\int xe^xdx=(x-1)e^x+cste$ **(IPP)**
2. $\int\sin^3(x)dx=x\mapsto\frac{-}{c}os(x)+\frac{cos^3(x)}{3}+C$ où $C\in\mathbb{R}$. (linéarisation)
3. $\int x^2\ln x\,dx=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{x^3}{9}+cste$ **(IPP)**
4. $\int(\ln x)^2\,dx = x\left(\ln^2(x)-2\ln(x)+2\right)+cste$ **IPP + question 2**
5. $\int\cos x\exp x\,dx=\frac{1}{2}e^x(sin(x)+cos(x)$ **(IPP)**
6. $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx=2ln(1+\sqrt{x})$ **(chgt de variable)**

Correction Ex 51

1. C'est faux...
2. il y a de l'idée.
3. une primitive est $\dfrac{9x^2-24x+8}{27}e^{3x}$

Correction Ex 52

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
2. À l'aide du changement de variable $u = e^x$. On a anors $du = e^x dx$. Concernant les bornes, x varie entre 0 et 1 donc u varie entre 1 et e. On obtient $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{u+1}}\,du = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}$
3. On a $x = \tan t \Leftrightarrow t = arctan(x)$ donc $dt = \dfrac{1}{1+x^2}dx$. La fonction $arctan$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\dfrac{\pi}{2};[\dfrac{\pi}{2}$. La variable x varie entre 0 et 1 donc t varie entre 0 et $\dfrac{\pi}{4}$. On a alors : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{2+\pi}{8}$ (changement de variable $x = \tan t$)
4. on note $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$ et on effectue le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$.

   On a $dx = -\dfrac{1}{u^2}du$ et donc :

   $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx = \int_2^{\frac{1}{2}} (1+u^2)\arctan(\frac{1}{u})\,(-\frac{1}{u^2})du = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1+u^2}{u^2}\arctan(\frac{1}{u})du$

   $\displaystyle = \int_{\frac{1}{2}}^2 (1+\frac{1}{u^2})(\frac{\pi}{2} - \arctan(u))du = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^2 (1+\frac{1}{u^2})du - I$. D'où $2I = \dfrac{\pi}{2}\left[-\dfrac{1}{u}+u\right]_{\frac{1}{2}}^2$ et donc $I = \dfrac{3\pi}{4}$

Correction Ex 53

1. Considérer x_1 et x_2 tels que $x_1 \leqslant x_2$, puis utiliser les propriétés de l'intégrale
2. Montrer que $\dfrac{e^t}{1+x} \leqslant \dfrac{e}{x}$ si $t \in [0,1]$. La limite est donc nulle.

Chapitre VII :

Equations différentielles

- Si l'équation différentielle est de la forme : $\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)=\gamma(x) \qquad (E)$ il suffit de tout diviser par $\alpha(x)$ sur chaque sous-intervalle de I où la fonction α ne s'annule pas. On résout l'équation (cf première partie) et on "recolle" les solutions (en regardant les limites à droite et à gauche)
- Un système différentiel linéaire du premier ordre s'écrit :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

- On le met sous la forme $X' = AX$. On essaie ensuite de diagonaliser A...

Exercice 54

En effectuant un changement de variable, résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ en posant $t = e^x$;
2. $y'' + y'\tan(x) - y\cos^2(x) = 0$ en posant $t = \sin x$;
3. $x^2y'' + y = 0$ en posant $t = \ln x$;
4. $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$ sur $]-1,1[$.

Exercice 55

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\textbf{1.} \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases} \qquad \textbf{2.} \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

Exercice 56

Donner les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ avec les matrices A suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Elements de corrections

Correction Ex 54

1. Posons $t = e^x$, puis $z(t) = y(x)$ (soit $z(e^x) = y(x)$). On en déduit tout calcul fait que $z'' - z = t$. Les solutions de l'équation homogène sont $t \mapsto k_1e^t + k_2e^{-t}$ et une solution particulière est $t \mapsto -t$. Les solutions de l'équation de départ sont donc $x \mapsto -e^x + k_1e^{e^x} + k_2e^{-e^x}$

   Soit z défini par $z(t) = y(x)$, ie $y(x) = z(\sin(x))$. L'équation devient $(1-t^2)z'' - (1-t^2)z = 0$ que l'on peut simplifier en $z'' - z = 0$ car on travaille dans $]-1; 1[$. On obtient $z(t) = k_1e^t + k_2e^{-t}$. Les solutions de l'équation de départ sont donc $x \mapsto k_1e^{\sin(x)} + k_2e^{-\sin(x)}$. Les solutions générales de l'équation vérifiée par z sont $t \mapsto e^{\frac{t}{2}} \left(k_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + k_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$. En revenant à la variable x, les solutions générales de l'équation de départ sont

$$x \mapsto \left(k_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)) + k_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x))\right)\sqrt{x}$$

2. Ici on fait le changement de variable $x = \sin(t)$ avec $t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et on pose $z(t) = y(\sin(t))$. On obtient que z est solution de l'équation $z'' + z = 0$. Les solutions générales sont $t \mapsto k_1 \cos(t) + k_2 \sin(t)$. En revenant à y et à x on trouve :

$$y(x) = k_1 \cos(\arcsin(x)) + k_2 \sin(\arcsin(x)) = k_1\sqrt{1-x^2} + k_2x$$

Correction Ex 55

1. Introduisons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

   de sorte que le système s'écrit $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 6)$. Comme 0 est racine double de A on commence par déterminer E_0 qui n'est d'autre que $Ker(A)$. Or, on voit bien que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ est dans $ker(A)$ si et seulement si $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. C'est l'équation d'un plan. La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Une base de E_0 est donnée par les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une base de $ker(A - 6I_3)$ est donnée par le vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   Les solutions du système différentiel sont donc données par les triplets s'écrivant :

$$X(t) = \lambda X_1 + \mu X_2 + \gamma e^{6t}X_3.$$

   où λ, μ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

2. De même, introduisons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   de sorte que le système s'écrit $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. La matrice A est donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont 0, 1 et 2 de

vecteurs propres respectifs associés $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Les solutions du système différentiel sont donc données par les triplets s'écrivant :

$$X(t) = \lambda X_1 + \mu e^t X_2 + \gamma e^{2t} X_3.$$

où λ, μ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Correction Ex 56

1. Les valeurs propres (complexes) de A sont 2, $1+i$ et $1-i$. Un vecteur propre associé à 2 est donné par $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un vecteur propre associé à $1+i$, est le vecteur $X_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc un vecteur propre associé à la valeur propre $1-i$ est $X_3 = \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel sont donc données par les triplets s'écrivant :

   $$X(t) = \alpha X_1 + aRe(e^{(1+i)t} X_2 + bIm(e^{(1+i)t} X_2$$

   où α, a et b sont des réels. Si on note $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ On obtient :

   $$\begin{cases} x_1(t) = \alpha e^{2t} + ae^t \cos t + be^t \sin t \\ x_2(t) = \alpha e^{2t} - ae^t \sin t + be^t \cos t \\ x_3(t) = \alpha e^{2t} + ae^t \sin t - be^t \cos t \end{cases}$$

2. Les valeurs propres de la matrice sont 1, i et $-i$. Un vecteur propre associé à 1 est $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$. .
   Un vecteur propre associé à i est $X_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bien entendu, la matrice étant réelle, un vecteur propre associé à $-i$ est $\overline{X_2}$. Pour obtenir des solutions réelles, on peut considérer (toujours parce que la matrice A est réelle) $\Re e(X_2 e^{it})$ et $\Im m(X_2 e^{it})$.
   Un solution générale du système sur $\mathbb{R}$ est donc :

   $$\begin{pmatrix} \lambda e^t - \mu \sin t + \nu \cos t \\ -3\lambda e^t + \mu \cos t + \nu \sin t \\ -4\lambda e^t + 2\mu \cos t + 2\nu \sin t \end{pmatrix}.$$